

[雙週一題]網路數學問題徵答
一百學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第五題: 101.04.27 公佈, 101.05.11 中午 12 點截止

找出所有函數 $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ 滿足

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x$$

其中 $x \neq \pm 1$ 。

解答: 函數 $\phi(t) = \frac{t-3}{t+1}$ 有 $\phi(\phi(\phi(t))) = t$, 並且 $\phi(\phi(t)) = \frac{3+t}{1-t}$ 。在原来的數學式中的 x 分別取代成 $\phi(x)$ 和 $\phi(\phi(x))$ 來額外獲得兩個方程式。因此就有由三個方程式所構成的線性聯立為

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) &= x \\ f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) + f(x) &= \frac{x-3}{x+1} \\ f(x) + f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) &= \frac{3+x}{1-x} \end{aligned}$$

這裡的未知數是指

$$f(x), \quad f\left(\frac{x-3}{x+1}\right), \quad f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)$$

解完聯立之後, 我們將發現

$$f(t) = \frac{4t}{1-t^2} - \frac{t}{2}$$

為函數方程式的唯一解。 □

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱, 或傳真 07-5253809, 或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。