[雙週一題]網路數學問題徵答
一百學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第四題： 101.04.13 公佈，101.04.27 中午 12 點截止

證明多項式

$$P(z) = z^7 + 7z^4 + 4z + 1$$

的所有解都會落在複數平面上一個圓心是原點且半徑長為 2 的圓內。

解答： 利用反證法，假設存在 z 且 $|z| \geq 2$ 使得 $P(z) = 0$。再由三角不等式，

$$\begin{aligned} 0 = \left|\frac{P(z)}{z^7}\right| &= \left|1 + \frac{7}{z^3} + \frac{4}{z^6} + \frac{1}{z^7}\right| \geq 1 - \left|\frac{7}{z^3}\right| - \left|\frac{4}{z^6}\right| - \left|\frac{1}{z^7}\right| \\ &\geq 1 - \frac{7}{8} - \frac{4}{64} - \frac{1}{128} = \frac{7}{128} > 0 \end{aligned}$$

會得到矛盾。也就是說，我們最初的假設是錯誤的。因此，$P(z)$ 的所有解都會落在圓心是原點且半徑長為 2 的圓內。 $\square$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。