[雙週一題]網路數學問題徵答
一百學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第三題： 100.03.30 公佈，100.04.13 中午 12 點截止

證明對於每個正整數 n

$$\tan\frac{\pi}{2n+1}\tan\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\tan\frac{n\pi}{2n+1}=\sqrt{2n+1}$$

恆成立。

解答： 用二項式定理展開 $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^m$ 及棣美弗公式

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^m=\cos m\alpha+i\sin m\alpha$$

我們可以得到

$$\sin m\alpha=\binom{m}{1}\cos^{m-1}\alpha\sin\alpha-\binom{m}{3}\cos^{m-3}\alpha\sin^3\alpha+\binom{m}{5}\cos^{m-5}\alpha\sin^5\alpha+\cdots$$

對於 $m=2n+1$，如果 $\alpha=\frac{\pi}{2n+1},\ \frac{2\pi}{2n+1},\ \ldots,\ \frac{n\pi}{2n+1}$ 那麼 $\sin(2n+1)\alpha=0$，且 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 皆不爲 0。將上式除以 $\sin^{2n+1}\alpha$，我們可得

$$\binom{2n+1}{1}\cot^{2n}\alpha-\binom{2n+1}{3}\cot^{2n-2}\alpha+\cdots+(-1)^n\binom{2n+1}{2n+1}=0$$

因此方程式

$$\binom{2n+1}{1}x^n-\binom{2n+1}{3}x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\binom{2n+1}{2n+1}=0$$

的根爲

$$x_k=\cot^2\frac{k\pi}{2n+1},\quad k=1,2,\ldots,n$$

由根與係數的關係

$$x_1x_2\cdots x_n=\frac{\binom{2n+1}{2n+1}}{\binom{2n+1}{1}}=\frac{1}{2n+1}$$

所以

$$\cot^2\frac{\pi}{2n+1}\cot^2\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\cot^2\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}$$

因爲 $0<\frac{k\pi}{2n+1}<\frac{\pi}{2}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$，由此可得這些餘切恆正。故將此式開根號取倒數，此題即可得證。 $\square$

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號**和 **E-mail**。