[雙週一題]網路數學問題徵答
一百學年度第二學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部

第二題： 101.03.16 公佈，101.03.30 中午 12 點截止

求下列方程式

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}=0$$

的實根。

解答：**【解法一】** 將 $a=\sqrt[3]{x-1}$, $b=\sqrt[3]{x}$ 和 $c=\sqrt[3]{x+1}$ 代入下列恆等式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$$

且根據原來方程式 $a+b+c=0$ 會得到

$$(x-1)+x+(x+1)-3\sqrt[3]{(x-1)x(x+1)}=0$$

可進一步化簡成 $x=\sqrt[3]{x^3-x}$。再把等號兩邊同時立方，我們會發現 $x^3=x^3-x$。因此 $x=0$ 爲此方程式的唯一解。

【解法二】 函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}$ 爲嚴格遞增，所以方程式 $f(x)=0$ 最多有一個根。因此 $x=0$ 滿足此方程式且爲唯一解。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號**和 **E-mail**。