[雙週一題]網路數學問題徵答
一百學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第一題： 101.03.02 公佈，101.03.16 中午 12 點截止

給定一整數數列 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 其總和爲 1，證明下列 n 個循環排列中

$$x_1, x_2, \ldots, x_n; \quad x_2, \ldots, x_n, x_1; \quad \ldots; \quad x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}$$

恰有一個循環排列其所有部份和皆大於 0。(所謂的部分和是指前 k 項, $k \le n$。)

例如： $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$，則有三個循環數列：x_1, x_2, x_3; x_2, x_3, x_1; x_3, x_1, x_2，其中只有最後的一個循環排列 x_3, x_1, x_2，所有的部分和：$x_3 = 4$, $x_3 + x_1 = 4 - 1 = 3$, $x_3 + x_1 + x_2 = 4 - 1 - 2 = 1$ 皆大於 0。

解答： 首先考慮整數數列 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的部分和數列 $S_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$, $k = 1, 2, \ldots, n$。

假設 $m = \min_{k=1,2,\ldots,n} S_k$，因爲 $S_n = 1$，所以 m 必小於等於 1。當 $n = 1$ 時，數列爲 1 顯然成立。以下考慮 $n \ge 2$ 的證明，可分成存在性和唯一性。

存在性：假設 S_k 數列中達到最小值(可能只有發生一次或是多次) 最後一次是發生在 $k = t$ 時，也就是 $m = S_t$，其中 $t \le n$。

考慮原本整數數列由第 k 項開始的循環數列如下: x_i, $i = k, k+1, \ldots, k+n-1$，其中如果 $i > n$ 時，定義 $x_i = x_{i-n}$。

由於 m 前一個的位置 $\sum_{i=1}^{t-1} x_i \ge \sum_{i=1}^{t} x_i$，假如當 $t = 1$ 時定義 $\sum_{i=1}^{t-1} x_i = 0$，因此可以得到 $x_t \le 0$。此外，觀察 m 在 S_k 數列中的下一個、下兩個值到最後一個位置其值必大於 m，也就是說 $S_{t+1} > S_t$, $S_{t+2} > S_t$, $\ldots$, $S_n > S_t$，可推得 $x_{t+1} > 0$, $x_{t+1} + x_{t+2} > 0$, $\ldots$, $\sum_{i=t+1}^{n} x_i > 0$。接著

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=t+1}^{n+1} x_i &= \sum_{i=t+1}^{n} x_i + x_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i - S_t + S_1 = 1 - m + S_1 \ge 1 \\
\sum_{i=t+1}^{n+2} x_i &= \sum_{i=t+1}^{n} x_i + x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i - S_t + S_2 = 1 - m + S_2 \ge 1 \\
&\vdots \\
\sum_{i=t+1}^{t+n} x_i &= \sum_{i=t+1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{t} x_i = S_n = 1
\end{aligned}
$$

所以，只要將 x_{t+1} 平移到第一個位置使得 x_t 爲最後一個位置即爲所求。

唯一性：部分循環和如果第一項爲 S_k，其中 $k \le t$ 則 $\sum_{i=k}^{t} x_i = S_t - S_{k-1} \le 0$ 會產生矛盾。接著，若 $k > t+1$ 時，考慮 $\sum_{i=k}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{t} x_i = S_n - \sum_{i=t+1}^{k-1} x_i =$

$1-\sum_{i=t+1}^{k-1} x_i \leq 0$，因爲由存在性證明得知 $\sum_{i=t+1}^{k-1} x_i \geq 1$。因此，循環和的開始項一定要從第 $t+1$ 項開始，得證。 $\square$

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。