[雙週一題]網路數學問題徵答
九十九學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第八題： 100.06.03 公佈，100.06.17 中午 12 點截止

是否存在一正整數 n 使得 $10^{10^{10^n}}+10^{10^n}+10^n-1$ 爲質數？
例如: 當 $n=1$ 時，$10^{10^{10^n}}+10^{10^n}+10^n-1=10^{10,000,000,000}+10^{10}+10-1$

解答： 令

$$N=10^{10^{10^n}}+10^{10^n}+10^n-1$$

而在 $n=2^m k$ 中 m 爲非負整數和 k 爲一正奇數。對於任何非負整數 j，

$$10^{2^m j}\equiv(-1)^j \pmod{10^{2^m}+1}$$

因爲 $10^n\geq n\geq 2^m\geq m+1$, 10^n 被 2^n 和 2^{m+1} 整除，且同樣 10^{10^n} 也被 2^{10^n} 和 2^{m+1} 整除。接著

$$N\equiv 1+1+(-1)+(-1)\equiv 0 \pmod{10^{2^m}+1}$$

因爲 $N\geq 10^{10^n}>10^n+1\geq 10^{2^m}+1$，其使得 N 爲可分解的，即不存在 n 使得 N 爲值數。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。