[雙週一題]網路數學問題徵答
九十九學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

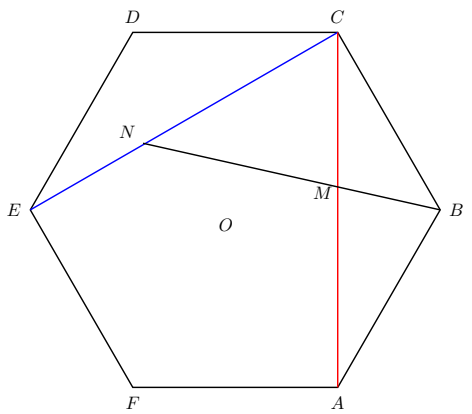
第七題： 100.05.20 公佈，100.06.03 中午 12 點截止

設正六邊形 $ABCDEF$ 的對角線 $\overline{AC}$ 和 $\overline{CE}$ 分別被點 M 及 N 分割，使得

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = r$$

若 B, M 和 N 三點共線，求 r 之值。

解答：【**解法一**】 將複數平面上的原點視作正六邊形的中心坐標，使得點 B, C, D, E, F, A 可分別用 $1, e, e^2, e^3, e^4, e^5$ 表示其坐標，其中 $e = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$。



因爲

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{NE}}{\overline{NC}} = \frac{1-r}{r}$$

所以 M 和 N 點的坐標分別爲

$$m = er + e^5(1-r) \quad \text{和} \quad n = e^3 r + e(1-r)$$

假設 B, M, N 爲共線等價於 $\dfrac{m-1}{n-1} \in \mathbb{R}^*$，亦即 $\overrightarrow{BM}$ 和 $\overrightarrow{BN}$ 平行。又因爲

$$\begin{aligned} m-1 &= er + e^5(1-r) - 1 \\ &= er - e^2(1-r) - 1 \\ &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} r - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}(1-r) - 1 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(2r-1) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} n-1 &= e^3 r + e(1-r) - 1 \\ &= -r + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(1-r) - 1 \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{3r}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(1-r) \end{aligned}$$

所以

$$\frac{m-1}{n-1} = \frac{-1+i\sqrt{3}(2r-1)}{-(1+3r)+i\sqrt{3}(1-r)} \in \mathbb{R}^*$$

利用複數虛部爲 0，可知

$$\sqrt{3}(1-r) - \sqrt{3}(1+3r)(2r-1) = 0$$

則 $1-r = 6r^2 - r - 1$，但長度比值不爲負的，所以 $r = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$。

【解法二】 利用複外積，可知

$$\frac{m-1}{n-1} = \frac{-1+i\sqrt{3}(2r-1)}{-(1+3r)+i\sqrt{3}(1-r)} \in \mathbb{R}^*$$

等價於

$$\begin{aligned} (m-1)\times(n-1) &= \left(-1+i\sqrt{3}(2r-1)\right) \times \left(-(1+3r)+i\sqrt{3}(1-r)\right) \\ &= 4\sqrt{3}\left(3r^2-1\right)i = 0 \end{aligned}$$

則 $3r^2 - 1 = 0$，但長度比值不爲負的，所以 $r = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$。 □

【註】 設 a, b 爲兩個複數，則

$$a \times b = \frac{1}{2}\left(\overline{a}b - a\overline{b}\right)$$

稱爲複數 a 與 b 的複外積。

□

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」)。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號**和 **E-mail**。