[雙週一題]網路數學問題徵答
九十九學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第六題： 100.05.06 公佈，100.05.20 中午 12 點截止

有 n 位女士坐成一排，然後 n 位女士全部起立再重新入座，而每一位女士可選擇自己之前的座位或是之前於她前後位置的座位，試問這 n 位女士有多少種入座的方式？

解答： 將此題做一般化的推論: 假設有 n 位女士按照第一次入座的順序由左至右依序編號爲 1 到 n，且有 n 個編號由左至右爲 1 到 n 的椅子。令 F_n 表示 n 位女士選擇自己之前的座位或是之前坐於她下一個人座位入座的座法數，則考慮最右邊編號爲 n 的椅子可能的入座方式如下:

(1) 爲編號 n 的女士入座: 表示她坐於自己原本的位置，則剩下的 $n-1$ 位女士，共有 F_{n-1} 種座法。

(2) 爲編號 $n-1$ 的女士入座: 表示她選擇下一個人的位置入座，則編號爲 n 的女士只能選擇編號 $n-1$ 的椅子入座，則剩下的 $n-2$ 位女士，共有 F_{n-2} 種座法。

綜合上述兩種情況，可得一遞迴關係式(斐波那契數列) 如下

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2$$

且 $F_0 = F_1 = 1$。接著求一般解如下:

【解法一】 特徵方程式法：求特徵方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ 的公式解可得到兩根分別爲 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 和 $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$。設存在兩常數 A, B，使得 $F_n = A\alpha^n + B\beta^n$ 成立。現在將 $F_0 = A + B = 1$ 和 $F_1 = A\alpha + B\beta = 1$ 兩方程式求聯立解可得到 $A = \frac{1-\beta}{\alpha-\beta}$ 和 $B = \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$，再將 α 和 β 的值帶入可得 $A = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 和 $B = \frac{-1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}$。因此

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \square$$

【解法二】 生成函數法：在求解之前，先令 $F(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \cdots$，經由移常數項再除以 x 可得

$$F_1 + F_2 x + F_3 x^2 + F_4 x^3 + \cdots = \frac{F(x) - 1}{x}$$

而左式可變成

$$
\begin{aligned}
&F_0 + (F_0 + F_1)x + (F_1 + F_2)x^2 + (F_2 + F_3)x^3 + \cdots \\
&= (F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \cdots) + (F_0x + F_1x^2 + F_2x^3 + \cdots) \\
&= F(x) + xF(x)
\end{aligned}
$$

因左右兩式相等，所以 $(F-1)/x = F + xF$，因此原本未知的生成函數爲

$$F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$

現在利用分項分式展開 $1/(1-x-x^2)$，將會得到費伯那西數的公式。分項分式法只有在分母是一次會增加它的成功性，然而在此是一個二次式，所以先將其分解。因此可以得到

$$1 - x - x^2 = (1 - xr_+)(1 - xr_-), \quad r_\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$$

所以

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x-x^2} &= \frac{1}{(1-xr_+)(1-xr_-)} \\
&= \frac{1}{x(r_+ - r_-)}\left(\frac{1}{1-xr_+} - \frac{1}{1-xr_-}\right) \\
&= \frac{1}{x(r_+ - r_-)}\left(\sum_{n=0}^{\infty} r_+^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} r_-^n x^n\right) \\
&= \frac{1}{(r_+ - r_-)}\left(\sum_{n=0}^{\infty} r_+^n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} r_-^n x^{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

可以很容易的辨認出 x^n 的係數

$$F_n = \frac{1}{(r_+ - r_-)}(r_+^{n+1} - r_-^{n+1}) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad \square$$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。