[雙週一題]網路數學問題徵答
九十九學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第四題： 100.04.08 公佈，100.04.22 中午 12 點截止

設 a, b, c 爲三角形的邊長，且 $p = (a+b+c)/2$ 而 r 爲內切圓的半徑。證明

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}$$

解答： 一給定的三角形面積可由下兩種方法計算：$A = pr$ 和 $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (海龍公式)。將其平方和相等我們可得到 $p^2r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$。設 $x = 1/(p-a)$, $y = 1/(p-b)$, $z = 1/(p-c)$，我們可以將不等式的右邊改寫成

$$\frac{1}{r^2} = pxyz = xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

因此原不等式等價於 $yz + xz + xy \leq x^2 + y^2 + z^2$。然而此不等式可由下列三個不等式 $y^2 + z^2 \geq 2yz$, $x^2 + z^2 \geq 2xz$, $x^2 + y^2 \geq 2xy$ 相加得證，或柯西不等式得證：

$$(x^2 + y^2 + z^2)(y^2 + z^2 + x^2) \geq (xy + yz + zx)^2 \qquad \square$$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。