[雙週一題]網路數學問題徵答
九十九學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第三題： 100.03.25 公佈，100.04.08 中午 12 點截止

一非負數列定義爲：

$$a_0 = a_1 = 3, \quad a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 + 2007, \quad n = 1, 2, \ldots$$

試求不超過 $\frac{(a_{2006})^2+(a_{2007})^2}{(a_{2006})(a_{2007})}$ 的最大整數。

解答： 考慮 $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 + 2007$, $a_{n-1}^2 + 2007 = a_n a_{n-2}$，將兩個方程式加起來得到

$$a_{n-1}(a_{n-1} + a_{n+1}) = a_n(a_n + a_{n-2})$$
$$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

因爲此爲不變式，所以對於 $i \geq 2$，定義 $b_i = \frac{a_i}{a_{i-1}}$，上述方程式亦即 $b_{n+1} + \frac{1}{b_n} = b_n + \frac{1}{b_{n-1}}$。因此，那麼可得 $b_{2007} + \frac{1}{b_{2006}} = b_3 + \frac{1}{b_2} = 225$。注意到 $b_{2007} = \frac{a_{2007}}{a_{2006}} = \frac{a_{2006}^2+2007}{a_{2006}a_{2005}} > \frac{a_{2006}}{a_{2005}} = b_{2006}$，表示 $b_{2007} + \frac{1}{b_{2007}} < b_{2007} + \frac{1}{b_{2006}} = 225$。因爲所有 b_i 大於 1，所以它只小了一點點，因此，推導出不超過 $\frac{a_{2007}^2+a_{2006}^2}{a_{2007}a_{2006}} = b_{2007} + \frac{1}{b_{2007}}$ 的最大整數爲 224。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。