[雙週一題]網路數學問題徵答 九十九學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系

補助單位: 教育部

第二題:

100.03.11 公佈, 100.03.25 中午 12 點截止

求下列方程組

$$x+y+z=w$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{w}$$

w, x, y, z 的所有實數解。

解答:【解法一】 將第一個方程式的 w 代入第二個方程式,化簡後會得到 (x+y)(x+z)(y+z)=0。在這個形式下可看到 x,y,z 其中二個變數必須差一個負號,且剩下的變數必須等於 w。

【解法二】 令 s = x + y 和 p = xy,則可由原式推得 w - z = s 和

$$\frac{s}{p} = \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{w} - \frac{1}{z} = \frac{z-w}{zw} = -\frac{s}{zw}$$

由 $\frac{s}{p}=\frac{s}{-zw}$ 可推得 s=0 或 -zw=p。假如 s=0,那麼會有 y=-x 和 w=z。假如 -zw=p=xy,那麼 -z 和 w 會是以 x 和 y 爲根的二次方程式 $T^2-sT+p=0$ 的根,因此由此可推得 w=x 和 -z=y 或是 w=y 和 -z=x。

答案請寄至-高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱,或傳真 07-5253809,或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。