[雙週一題]網路數學問題徵答
九十九學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第一題： 100.02.25 公佈，100.03.11 中午 12 點截止

設 n 爲非負的整數，證明比 $(\sqrt{3}+1)^{2n}$ 大的最小整數可被 2^{n+1} 整除。

解答：【**解法一**】 解題的關鍵是下一個比 $(1+\sqrt{3})^{2n}$ 的整數是 $(1+\sqrt{3})^{2n}+(1-\sqrt{3})^{2n}$。對於每個正整數 n，存在整數 A_n 和 B_n 由二項式定理可得

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3})^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(\sqrt{3})^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}(\sqrt{3})^{2k}+\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}(\sqrt{3})^{2k-1} \\ &= A_n+B_n\sqrt{3}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{3})^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-\sqrt{3})^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}(-\sqrt{3})^{2k}+\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}(-\sqrt{3})^{2k-1} \\ &= A_n-B_n\sqrt{3}\end{aligned}$$

因此 $(1+\sqrt{3})^{2n}+(1-\sqrt{3})^{2n}=2A_n$ 爲整數 (: 因爲 $|1-\sqrt{3}|<1$ 會有 $0<(1-\sqrt{3})^{2n}<1$)。因此 $2A_n$ 的確是比 $(1+\sqrt{3})^{2n}$ 大的下一個整數。
因此此問題是變成要證明 $2A_n$ 可以被 2^{n+1} 整除，或是 A_n 可被 2^n 整除。
我們假設對於所有 n，A_n 和 B_n 可以被 2^n 整除。接下來用歸納法證明。因爲 $A_1=4$ 和 $B_1=2$，因此對於 $n=1$ 成立。假設 $n=k$ 時成立，那麼會有

$$\begin{aligned}A_{k+1}+B_{k+1}\sqrt{3} &= (1+\sqrt{3})^2(A_k+B_k\sqrt{3}) \\ &= (4A_k+6B_k)+(2A_k+4B_k)\sqrt{3}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}A_{k+1} &= 2(2A_k+3B_k) \\ B_{k+1} &= 2(A_k+2B_k)\end{aligned}$$

這和我們的假設二個都可以被 2^{k+1} 整除相同，所以得證。 □

【解法二】 因爲 $|1-\sqrt{3}|<1$ 會有 $0<(1-\sqrt{3})^{2n}<1$，假設下個整數是 $C_n=(1+\sqrt{3})^{2n}+(1-\sqrt{3})^{2n}$。接下來要證明 C_n 可被 2^{n+1} 整除。考慮

$$\begin{aligned} C_n &= (1+\sqrt{3})^{2n}+(1-\sqrt{3})^{2n} \\ &= (4+2\sqrt{3})^{n}+(4-2\sqrt{3})^{n} \end{aligned}$$

的解爲 λ_1 與 λ_2，那麼會有特徵函數 $\lambda^2-8\lambda+4=0$，因此會有遞迴關係 $C_{n+2}=8C_{n+1}+4C_n$。假設 C_n 可被 2^{n+1} 整除，則 C_{n+1} 可被 2^{n+2} 整除，那麼會有 $4C_n$ 可被 2^{n+3} 整除與 $8C_{n+1}$ 可被 2^{n+5} 整除，所以 C_{n+2} 可被 2^{n+3} 整除。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。