[雙週一題]網路數學問題徵答
一百學年度第一學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第八題： 100.12.23 公佈，100.01.06 中午 12 點截止

試證對每個 $n > 1$ 的整數下列多項式方程式

$$\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1 = 0$$

無有理根的解。

解答： 首先我們先看對每個 $k > 0$ 的整數和質數 p，p^k 不能整除 $k!$。事實上對於 $p^r \mid k!$ 其中 p 的最高次方 r 為

$$r = \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{p^2}\right] + \cdots < \frac{k}{p} + \frac{k}{p^2} + \cdots = \frac{k}{p-1} \leq k$$

現在假設 α 為給定方程式中的一個有理根，則

$$\alpha^n + \frac{n!}{(n-1)!}\alpha^{n-1} + \cdots + \frac{n!}{2!}\alpha^2 + \frac{n!}{1!}\alpha + n! = 0 \tag{1}$$

從 (1) 式來看 α 必須為一個不等於 ± 1 的整數。因為若 $\alpha = 1$ 時，每項係數都為 > 1 的整數取總和必大於零; 若 $\alpha = -1$ 時，則

$$n \text{ 為奇數時: } \left(-1 + \frac{n!}{(n-1)!}\right) + \cdots + \left(-\frac{n!}{3!} + \frac{n!}{2!}\right) + (-n! + n!) > 0$$
$$n \text{ 為偶數時: } \left(1 - \frac{n!}{(n-1)!}\right) + \cdots + \left(\frac{n!}{3!} - \frac{n!}{2!}\right) + (n! - n!) < 0$$

接著運用

> 整係數多項式的一次因式檢驗法(牛頓定理)
> 設 $f(x) = ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 為整係數 n 次多項式，若 $ax - b$ 為 $f(x)$ 的因式，其中 a, b 為整數且互質，則 $a \mid a_n$ 且 $b \mid a_0$。

令 p 為 n 的質因數且在 $p^r \mid n!$ 中 r 是 p 的最高次方，又因為 (1) 式的領導係數為 1 使得 $\pm 1 \mid 1$，則 $p \mid \left(\alpha = \frac{p^r}{\pm 1}\right)$。由於 $p^k \mid \alpha^k$ 和 $p^k \nmid k!$，我們得到 $p^{r+1} \mid n!\alpha^k/k!$ 其中 $k = 1, 2, \ldots, n$。但此由方程式 (1) 得到 $p^{r+1} \mid n!$ 為一矛盾。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主

旨為「雙週一題」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。