

[雙週一題]網路數學問題徵答  
一百學年度第一學期

主辦單位: 中山大學應用數學系  
補助單位: 教育部

第七題: 100.12.09 公佈, 100.12.23 中午 12 點截止

證明三度空間上的任意向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^3 \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$$

附註:  $\times$  代表向量的外積。

解答: 若  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  或  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$  則不等式明顯成立。然而對其他情況而言, 我們考慮一個三角形  $ABC$  使得  $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$  和  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$ 。我們再將  $\alpha, \beta, \gamma$  分別視為  $\angle A, \angle B$  和  $\angle C$ 。因為  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \gamma$ , 則不等式為

$$|\mathbf{a}|^3 |\mathbf{b}|^3 \sin^3 \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$$

可簡化成

$$|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin^3 \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} |\mathbf{c}|^2$$

由正弦定理

$$2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta \cdot \sin^3 \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} (2R \sin \gamma)^2$$

可再進一步簡化為

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

最後由 Jensen 不等式運用函數  $f(x) = \ln \sin x$ , 因為  $f'(x) = \cot x$  為嚴格遞減所以當  $0 < x < \pi$  時  $f(x)$  為開口向上的圖形。

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱, 或傳真 07-5253809, 或利用電子郵件信箱 [problem@math.nsysu.edu.tw](mailto:problem@math.nsysu.edu.tw) (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。