

[雙週一題]網路數學問題徵答
一百學年度第一學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第四題: 100.10.28 公佈, 100.11.11 中午 12 點截止

重複投擲一個公正的銅板, 求出現連續 2 次反面之前, 已經出現連續 5 次正面的機率。

解答: 【解法一】把這問題想成 H (正面)與 T (反面) 的數列。因為同數列中不會出現兩次 T , 並且數列中一串可能為 1 個、2 個、3 個和 4 個的 H 數列會被 T 給隔開並且最後以連續 5 個 H 結束。由於數列中的第一個字母可以為 T 或是 H 為開始, 假若數列為 T 開頭則必須接著以 H 開頭數列, 所以 T 開頭數列的機率是 H 開頭數列機率的一半, 因此總機率為

$$P(\text{以 } T \text{ 開頭數列}) + P(\text{以 } H \text{ 開頭數列}) = \frac{3}{2}P(\text{以 } H \text{ 開頭數列})$$

此題目的答案為取所有數字和的型式

$$\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^b} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^c} \cdots \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^5$$

其中 $a, b, c, \dots \in \{1, 2, 3, 4\}$ 。所以 $(1/2)^a$ 所有形式的總數和為 $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 15/16$, 因此假設在最後五個為 H 之前的 n 個 H 開頭的數列, 所有數字總和可改寫為

$$\frac{3}{2} \left(\left(\frac{15}{16} \right)^n \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) \cdot \left(\frac{1}{32} \right) = \frac{3}{64} \left(\frac{15}{32} \right)^n$$

其中 n 範圍為 0 到 ∞ , 由於此為在最後五個為 H 之前可以有多少個 H 開頭的數列問題。這是個無限的幾何數列其總合是 $\frac{3/64}{1-(15/32)} = \frac{3}{34}$, 所以此機率為 $\frac{3}{34}$ 。

【解法二】令 p_H, p_T 分別表示為 H 與 T 開始的有效字串機率。一個有效字串不是以 H 為開始, 就是以 T 為開始再以 H 繼續進行 (此列中不能有兩個 T)。因此

$$p_T = \frac{1}{2}p_H$$

一個以 H 開始的有效字串可以首先必須第 1, 2, 3, 4 次為 H , 接著為 T , 最後再一個以 H 為開始的有效字串, 或者是直接達到連續五次 H 的數列這兩種字串型式。因此,

$$p_H = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \right) p_H + \frac{1}{32} \Rightarrow p_H = \frac{1}{17}$$

此答案為 $p_H + p_T = \frac{3}{2}p_H = \frac{3}{34}$ 。 □

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。