[雙週一題]網路數學問題徵答
一百學年度第一學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部

第三題：　100.10.14 公佈，100.10.28 中午 12 點截止

找到所有多項式來滿足函數方程式

$$(x+1)P(x)=(x-10)P(x+1)$$

解答：**【解法一】** 由 $(x+1)P(x)=(x-10)P(x+1)$ 的關係得知 $P(x)$ 被 $(x-10)$ 整除。再轉移變數，我們得到等同關係式 $xP(x-1)=(x-11)P(x)$，可得知 $P(x)$ 也被 x 整除。然而存在一些多項式 $P_1(x)$ 使得 $P(x)=x(x-10)P_1(x)$。代入原本的多項式再削去公因式，我們發現 $P_1(x)$ 滿足

$$xP_1(x)=(x-9)P_1(x+1)$$

在討論之前，我們發現 $P_1(x)=(x-1)(x-9)P_2(x)$。重覆探討下去，我們最終發現 $P(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-10)Q(x)$，其中 $Q(x)$ 滿足 $Q(x)=Q(x+1)$。可推得 $Q(x)$ 爲常數，所以此題的解爲

$$P(x)=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$$

其中 a 爲一個任意常數。

【解法二】 參考台南女中黃信淳老師的解答

$$\begin{aligned}(x+1)P(x)&=(x-10)P(x+1)\\ x=10 \text{ 代入} \Rightarrow P(10)&=\frac{0}{11}P(11)=0\\ x=9 \text{ 代入} \Rightarrow P(9)&=\frac{-1}{10}P(10)=0\end{aligned}$$

依次類推，$P(0)=P(1)=\cdots=P(10)=0$。假設

$$P(x)=x(x-1)\cdots(x-9)(x-10)f(x)$$

則

$$P(x+1)=(x+1)x\cdots(x-8)(x-9)f(x+1)$$

因此

$$\begin{aligned}(x+1)[x(x-1)\cdots(x-9)(x-10)f(x)]&=(x-10)[(x+1)x\cdots(x-8)(x-9)f(x+1)]\\ &\Rightarrow f(x)=f(x+1)\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 爲常數多項式，且 $P(x)=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$，其中 $a\in\mathbb{R}$。$\square$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。