[雙週一題]網路數學問題徵答
一百學年度第一學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部

第二題：　　100.9.30 公佈，100.10.14 中午 12 點截止

找出下列丟番圖方程式的所有正整數解 (x, y, z, t)

$$(x+y)(y+z)(z+x) = txyz$$

其中 $\gcd(x, y) = \gcd(y, z) = \gcd(z, x) = 1$。

解答： 明顯得知 $\gcd(x, x+y) = \gcd(x, x+z) = 1$。所以在給定的方程式中，$x$ 整除 $y+z$。同樣地，y 整除 $z+x$ 和 z 整除 $x+y$。因而存在整數 a, b, c 其中 $abc = t$ 並且

$$x + y = cz$$
$$y + z = ax$$
$$z + x = by$$

視爲一齊次聯立方程式有 x, y, z 變數。因爲我們假設這聯立式有非零的解，係數矩陣的行列式爲零。事實上，我們得到一個新丟番圖方程式有未知數 a, b, c:

$$abc - a - b - c - 2 = 0$$

這可由以下的情況來檢驗：

1. 若 $a = b = c$，則 $a = 2$ 且得到 $x = y = z$，因爲這些數爲兩兩互質。這意味 $x = y = z = 1$ 且 $t = 8$。我們得到解爲 $(1, 1, 1, 8)$。
2. 若 $a = b, a \neq c$，此方程式變爲 $a^2c - 2 = 2a + c$，其等同於 $c(a^2 - 1) = 2(a+1)$，也就是 $c(a-1) = 2$。我們不是如同情況 1，就是找到新的解 $c = 1$, $a = b = 3$。這產生原來方程式的解爲 $(1, 1, 2, 9)$。
3. 若 $a > b > c$，在這個情況爲 $-2 = a + b + c < 3a$。因此，$a(bc - 3) < 2$，使得，$bc - 3 < 2$，也就是 $bc < 5$。我們有以下情況：
   (i) $b = 2, c = 1$，所以 $a = 5$ 且我們得到解爲 $(1, 2, 3, 10)$。
   (ii) $b = 3, c = 1$，所以 $a = 3$ 且我們回到情況 2。
   (iii) $b = 4, c = 1$，所以 $3a = 7$，這是不可能的。

總之，我們得到的解爲 $(1, 1, 1, 8)$, $(1, 1, 2, 9)$, $(1, 2, 3, 10)$，和由 x, y, z 的排列得到的，所以總共有 10 個解。 $\square$

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號**和 **E-mail**。