

[雙週一題]網路數學問題徵答
一百學年度第一學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部

第一題： 100.09.16 公佈，100.09.30 中午 12 點截止

設 $a_0 = 1, a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2}, n \geq 1$ ，試求 答案：1

$$\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + \cdots + \frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{a_{n+1}-1}, \quad n \geq 1$$

解答：【解法一】 因為

$$a_{k+1} - 1 = \frac{a_k^2 - 1}{2}$$

所以

$$\frac{1}{a_{k+1} - 1} = \frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_k + 1}, \quad k \geq 1$$

或

$$\frac{1}{a_k + 1} = \frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_{k+1} - 1}, \quad k \geq 1$$

則

$$\frac{1}{a_1+1} + \cdots + \frac{1}{a_n+1} \tag{1}$$

$$= \left(\frac{1}{a_1-1} - \frac{1}{a_2-1} \right) + \left(\frac{1}{a_2-1} - \frac{1}{a_3-1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_n-1} - \frac{1}{a_{n+1}-1} \right) \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{a_{n+1}-1} \tag{3}$$

在 (3) 等號兩邊同時加上 $\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_{n+1}-1}$ 即得 $\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + \cdots + \frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{a_{n+1}-1} = 1$ 。

【解法二】 假設當 $n \geq 1$ 時，由數學歸納法來求證如下：

(i) 當 $n = 1$ 時，則 $\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ 。

(ii) 令 $n = k$ 時，假設 $\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + \cdots + \frac{1}{a_k+1} + \frac{1}{a_{k+1}-1} = 1$ 成立。

(iii) 當 $n = k + 1$ 時，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_0 + 1} + \frac{1}{a_1 + 1} + \cdots + \frac{1}{a_k + 1} + \frac{1}{a_{k+1} + 1} + \frac{1}{a_{k+2} - 1} \\ &= 1 - \frac{1}{a_{k+1} - 1} + \frac{1}{a_{k+1} + 1} + \frac{1}{a_{k+2} - 1} \\ &= 1 + \frac{-a_{k+1} - 1 + a_{k+1} - 1}{a_{k+1}^2 - 1} + \frac{1}{\frac{a_{k+1}^2 + 1}{2} - 1} \\ &= 1 + \frac{-2}{a_{k+1}^2 - 1} + \frac{2}{a_{k+1}^2 - 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。