

[雙週一題]網路數學問題徵答
九十八學年度第二學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部

第七題： 99.05.21 公佈，99.06.04 中午 12 點截止

設 $a, b, c \geq 0$ ，且 $a + b + c = ab + bc + ca$ ，試找出滿足不等式

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} - k \right) \geq k$$

之最大的實數 k 和等號成立的條件。

解答：此不等式等價於

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq k + (a+b+c)k = (a+b+c+1)k$$

另一方面，利用條件 $a + b + c = ab + bc + ca$ 可得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) + (ab + bc + ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{(a+b+c)(a+b+c+1)}{(a+b+c)^2 - abc} \end{aligned}$$

因此

$$\frac{(a+b+c)}{(a+b+c+1)} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 - abc} \geq 1$$

當 $abc = 0$ 等號成立，也就是 $k = 1$ 為最大值。 \square

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。