[雙週一題]網路數學問題徵答
九十八學年度第二學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部

第六題：　　99.05.07 公佈，99.05.21 中午 12 點截止

設 $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ 為區間 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 中的實數，且滿足

$$\tan\left(a_0-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(a_1-\frac{\pi}{4}\right)+\cdots+\tan\left(a_n-\frac{\pi}{4}\right)\geq n-1$$

試證

$$\tan a_0\tan a_1\cdots\tan a_n\geq n^{n+1}$$

成立。

解答：設 $b_k=\tan\left(a_k-\frac{\pi}{4}\right),\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$，而且每一個對於 k，會有 $-1<b_k<1$，則可推得

$$1+b_k\geq\sum_{0\leq\ell\neq k\leq n}(1-b_\ell) \tag{1}$$

對正實數 $1-b_\ell$，其中 $\ell=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1,\ k+1,\ldots,\ n$，利用算幾不等式，可得到

$$\sum_{0\leq\ell\neq k\leq n}(1-b_\ell)\geq n\left(\prod_{0\leq\ell\neq k\leq n}(1-b_\ell)\right)^{1/n} \tag{2}$$

從不等式 (1) 和 (2)，可推得

$$\prod_{k=0}^{n}(1+b_k)\geq n^{n+1}\left(\prod_{\ell=0}^{n}(1-b_\ell)^n\right)^{1/n}$$

因此

$$\prod_{k=0}^{n}\frac{1+b_k}{1-b_k}\geq n^{n+1}$$

又因爲

$$\frac{1+b_k}{1-b_k}=\frac{1+\tan\left(a_k-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan\left(a_k-\frac{\pi}{4}\right)}=\tan\left[\left(a_k-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\tan a_k$$

所以得證。 $\square$

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『 雙週一題 』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。