[雙週一題]網路數學問題徵答
九十八學年度第二學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部

第五題：　99.04.23 公佈，99.05.07 中午 12 點截止

設 90! 的末位非零三位數為 n，試求 n 值？(請附上推導過程，否則將不予計分。)

【註】

1. k 階乘為 $k! = 1 \times 2 \times \cdots k,\ k \in \mathbb{N}$ 且 $0! = 1$。
2. 例：數字 1234560000 的末位非零三位數為 456。

解答：因為

$$\begin{aligned}(5k+1)(5k+2)(5k+3)(5k+4) &= [(5k+1)(5k+4)]\,[(5k+2)(5k+3)] \\ &= (25k^2+25k+4)(25k^2+25k+6) \\ &= (25k^2+25k)^2 + 10(25k^2+25k) + 24 \\ &= 24 \qquad (\text{mod } 125)\end{aligned}$$

且因 90! 中 5 的因數總共有 $\lfloor \frac{90}{5} \rfloor + \lfloor \frac{90}{25} \rfloor = 18 + 3 = 21$ 個，為 2 的倍數總共有 $\lfloor \frac{90}{2} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{90}{64} \rfloor = 86$ 個。

令 $N = \frac{90!}{10^{21}}$，且令 n 為 $N \pmod{1000}$，則 90! 因數中 2 的個數比 5 多 3 個以上，可知 N 為 8 的倍數，因此 n 亦是 8 的倍數。

令 $90! = AB$，其中 A 為 90! 中與 5 互質的所有因數乘積，B 為 90! 中所有 5 的倍數乘積，因此

$$A = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdots (86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89)$$

同理，

$$\begin{aligned}B = &(5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20) \cdot (30 \cdot 35 \cdot 40 \cdot 45) \cdot (55 \cdot 60 \cdot 65 \cdot 70) \\ &\cdot (80 \cdot 85 \cdot 90) \cdot (25 \cdot 50 \cdot 75)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{B}{5^{21}} &= (1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)\cdot(6\cdot 7\cdot 8\cdot 9)\cdot(11\cdot 12\cdot 13\cdot 14)\cdot(16\cdot 17\cdot 18)\cdot(1\cdot 2\cdot 3)\\ &\equiv 24^3\cdot(16)\cdot(17)\cdot(18)\cdot 6 \pmod{125}\\ &\equiv 74 \pmod{125}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{gathered}(2^{21})\cdot N = \frac{AB}{5^{21}} \equiv (24)^{18}\cdot\frac{B}{5^{21}} \pmod{125}\\ N = 12^{15}\cdot 6^3\cdot 74 \equiv 112 \pmod{125}\end{gathered}$$

因此可能 n 值爲 112, 237, 362, 487, 612, 737, 862, 987，但因爲 n 必須爲 8 之倍數，故 n 值爲 112。 $\square$

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。