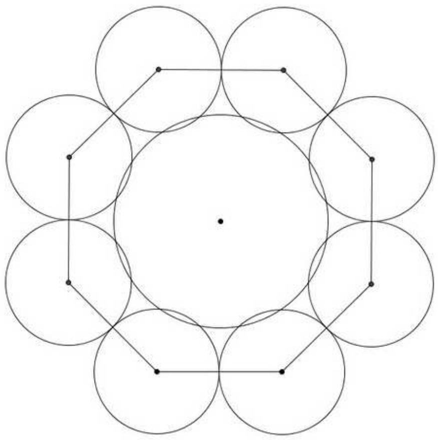
[雙週一題]網路數學問題徵答
九十八學年度第二學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部

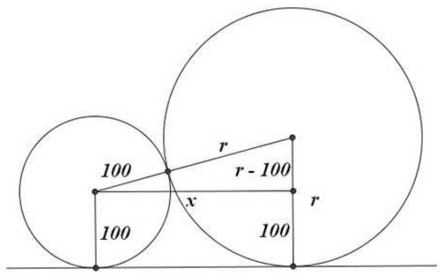
第四題：　　　　　　99.04.09 公佈，99.04.23 中午 12 點截止

八個半徑爲 100 的球放置在一個平坦的面上，每一個球兩兩互切，而且它們的球心爲一正八邊形的頂點；第九個球放置在同一個平坦的面上，使它與八個球均相切，試求第九個球的半徑。

解答： 解題關鍵在於了解此題的立體圖形。下圖爲一平坦面上的八個球與第九個球相切的俯視圖；由於中間的球 (第九個球) 有較大的半徑，所以俯視圖會有重疊部分。



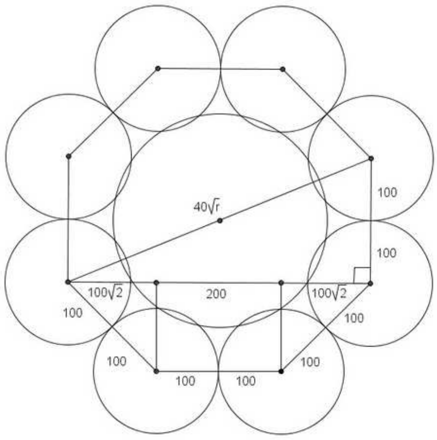
令第九個球的半徑爲 r，因此它與其他八個球的關係如下圖：



由上圖可知，將小圓的圓心與大圓的圓心連線，再加上此二球與平面垂直的半徑可得到一梯形；若再畫一條從小圓圓心到大圓垂直於地面的半徑之線段，可得到一個直角三角形。令此線段爲 x，根據畢氏定理：

$$x^2 + (r-100)^2 = (r+100)^2 \Rightarrow x = 20\sqrt{r}$$

【解法一】

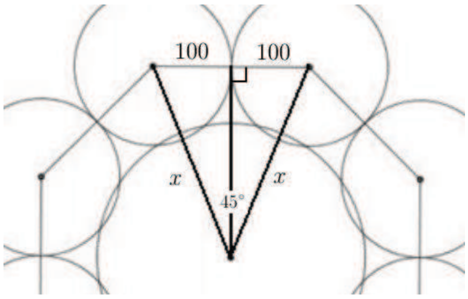


x 的長度爲從此八邊形任一頂點到中心的距離，所以此八邊形的對角線長度爲 $2x = 40\sqrt{r}$。由上圖可知，有一直角三角形三邊長分別爲 $40\sqrt{r}$ (斜邊)，$100 + 100$ 高，$100\sqrt{2} + 200 + 100\sqrt{2}$ (底)，利用畢氏定理：

$$\begin{aligned}(40\sqrt{r})^2 &= 200^2 + [200(\sqrt{2}+1)]^2 \\ 1600r &= 200^2[(1+\sqrt{2})^2 + 1] \\ r &= 100 + 50\sqrt{2}\end{aligned}$$

因此第九個球的半徑爲 $100 + 50\sqrt{2}$。

【解法二】



如上圖，因爲正八邊形相鄰二點與中心連線的二線段所夾的角度爲 $45°$，同時此正八邊形邊長爲 200，頂點到中心的距離爲 x，即 $20\sqrt{r}$，利用餘弦定理

$$200^2 = (20\sqrt{r})^2 + (20\sqrt{r})^2 - 2(20\sqrt{r})(20\sqrt{r}) \times \cos 45°$$

或邊角關係

$$20\sqrt{r} \times \sin 22.5° = 100$$

可得 $r = 100 + 50\sqrt{2}$。 □

答案請寄至–高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。