[雙週一題]網路數學問題徵答
九十八學年度第二學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部

第三題：　　99.03.26 公佈，99.04.9 中午 12 點截止

觀察 $6! = 8 \cdot 9 \cdot 10$，即當 $n = 6$ 時，$6!$ 可以表示為 8, 9, 10 三個連續正整數的乘積。對所有的正整數 a 且 $1 < a < n-1$，試求最大的正整數 n 使得 $n!$ 能被表示成 $n-a$ 個連續正整數的乘積，即請將 n 表為一個 a 的函數。

解答：【**解法一**】

假設 $(n-a)$ 個連續正整數中最大的數為 k，明顯的 k 不可能小於或等於 n，同時其他 $n-a-1$ 個連續正整數的乘積一定小於 $n!$。要讓 n 最大，那麼此 $(n-a)$ 個連續正整數最小的數越小越好，由此可推得 k 也是越小越好，但又因為 $k > n$，所以 $k = n+1$。所以此 $(n-a)$ 個連續正整數為 $a+2, a+3, \ldots, n+1$，推得 $\frac{(n+1)!}{(a+1)!} = n! \ \Rightarrow \ n+1 = (a+1)! \ \Rightarrow \ n = (a+1)! - 1$。

【**解法二**】

設 $n! = (k+n)(k+n-1)\cdots(k+a+1) = \frac{(n+k)!}{(k+a)!}$，其中 $k \geq 1$ 且為正整數。那麼整理後可得

$$1 = \frac{(n+k)!}{(k+a)!n!} = \frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)}{(k+a)!}$$
$$= \frac{n+k}{k+a} \cdot \frac{n+k-1}{k+a-1} \cdots \frac{n+2}{a+2} \cdot \frac{n+1}{(a+1)!}$$

因為

$$\frac{n+k}{k+a} \geq 1, \frac{n+k-1}{k+a-1} \geq 1, \ldots, \frac{n+2}{a+2} \geq 1$$

而且他們的乘積等於 1，所以 $\frac{n+1}{(a+1)!} \leq 1$，那麼由此可知 $n+1 \leq (a+1)! \ \Leftrightarrow \ n \leq (a+1)! - 1$。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。