

[雙週一題]網路數學問題徵答  
九十八學年度第二學期

主辦單位：中山大學應用數學系  
補助單位：教育部

第二題： 99.03.12 公佈，99.03.26 中午 12 點截止

設  $a, b, x$  和  $y$  皆為實數且滿足下列方程式：

$$\begin{aligned}ax + by &= 3 \\ax^2 + by^2 &= 7 \\ax^3 + by^3 &= 16 \\ax^4 + by^4 &= 42\end{aligned}$$

試求  $ax^5 + by^5$  之值？（請附上推導過程，否則將不予計分。）

解答：設  $S = (x + y)$  以及  $P = xy$ 。

然而關係式

$$(ax^n + by^n)(x + y) = (ax^{n+1} + by^{n+1}) + (xy)(ax^{n-1} + by^{n-1})$$

可以寫成：

$$\begin{aligned}(ax^2 + by^2)(x + y) &= (ax^3 + by^3) + (xy)(ax + by) \\(ax^3 + by^3)(x + y) &= (ax^4 + by^4) + (xy)(ax^2 + by^2)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}7S &= 16 + 3P \\16S &= 42 + 7P\end{aligned}$$

因此， $S = -14$  以及  $P = -38$ ，故

$$\begin{aligned}(ax^4 + by^4)(x + y) &= (ax^5 + by^5) + (xy)(ax^3 + by^3) \\42(S) &= (ax^5 + by^5) + (P)(16) \\42(-14) &= (ax^5 + by^5) + (-38)(16) \\ax^5 + by^5 &= 20\end{aligned}$$

□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 [problem@math.nsysu.edu.tw](mailto:problem@math.nsysu.edu.tw) (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。