# [雙週一題]網路數學問題徵答
# 九十九學年度第一學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第八題： 99.12.24 公佈，00.01.07 中午 12 點截止

證明存在一常數 $K$ 使得對於所有正數 $a_1, a_2, \ldots$ 下列不等式恆成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

解答： 設 $k=2t$ 爲正偶數，那麼要證明

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq 4 \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{a_n}$$

從上式不等式，以下證明當 $K=4$ 的無窮和不等式。
令 $b_1, b_2, \ldots, b_k$ 爲 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 遞增排列。對於 $1 \leq p \leq t$ 有

$$\begin{aligned} a_1+a_2+\cdots+a_{2p} &\geq a_1+a_2+\cdots+a_{2p-1} \\ &\geq b_1+b_2+\cdots+b_{2p-1} \\ &\geq pb_p \end{aligned}$$

因爲所有項皆爲正，且最後 $p$ 項最小爲 $b_p$，因此

$$\frac{2p-1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2p-1}} \leq \frac{2p-1}{pb_p} < \frac{2}{b_p}$$

且

$$\frac{2p}{a_1+a_2+\cdots+a_{2p}} \leq \frac{2}{b_p}$$

因此

$$\frac{2p-1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2p-1}} + \frac{2p}{a_1+a_2+\cdots+a_{2p}} < \frac{4}{b_p}$$

那麼

$$\sum_{p=1}^{t} \left( \frac{2p-1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2p-1}} + \frac{2p}{a_1+a_2+\cdots+a_{2p}} \right) < \sum_{p=1}^{t} \frac{4}{b_p}$$

整理不等式左邊會有

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq \sum_{p=1}^{t} \frac{4}{b_p} < \sum_{p=1}^{k} \frac{4}{b_p} = 4 \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{a_n}$$

如果級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(1/a_n)$ 發散，那麼不等式自然會成立。否則

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leq 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leq 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} \qquad \square$$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明**姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號**和 **E-mail**。