

[雙週一題]網路數學問題徵答  
九十九學年度第一學期

主辦單位：中山大學應用數學系  
補助單位：教育部

第七題： 99.12.10 公佈，99.12.24 中午 12 點截止

設  $a, b, c, d$  為正實數且滿足  $abcd = 1$ ，證明

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+cd}{1+c} + \frac{1+da}{1+d} \geq 4$$

解答：不等式左邊代入  $cd = \frac{1}{ab}$ ， $da = \frac{1}{bc}$ ，化簡可得

$$\begin{aligned} \frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+cd}{1+c} + \frac{1+da}{1+d} &= \frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+1/ab}{1+c} + \frac{1+1/bc}{1+d} \\ &= \frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+ab}{ab+abc} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+bc}{bc+bcd} \\ &= (1+ab) \left( \frac{1}{1+a} + \frac{1}{ab+abc} \right) \\ &\quad + (1+bc) \left( \frac{1}{1+b} + \frac{1}{bc+bcd} \right) \end{aligned}$$

利用不等式  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ ，可得

$$\begin{aligned} \text{原式} &\geq (1+ab) \frac{4}{1+a+ab+abc} + (1+bc) \frac{4}{1+b+bc+bcd} \\ &= 4 \left( \frac{1+ab}{1+a+ab+abc} + \frac{1+bc}{1+b+bc+bcd} \right) \\ &= 4 \left( \frac{1+ab}{1+a+ab+abc} + \frac{a+abc}{a+ab+abc+abcd} \right) = 4 \quad \square \end{aligned}$$

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 [problem@math.nsysu.edu.tw](mailto:problem@math.nsysu.edu.tw) (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。