

[雙週一題]網路數學問題徵答
九十九學年度第一學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第六題: 99.11.26 公佈, 99.12.10 中午 12 點截止

試證存在不全為 0 的 3 個整數 a, b, c , 且每一個的絕對值會小於一百萬, 使得

$$|a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}c| < 10^{-11}$$

解答: 令 S 為 10^{18} 個實數 $r + \sqrt{2}s + \sqrt{3}t$ 對於每一個 $r, s, t \in \{0, 1, \dots, 10^6 - 1\}$ 的集合, 且令 $d = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})10^6$, 則每一個 $x \in S$ 是落於區間 $0 \leq x < d$ 。將此區間分割成 $10^{18} - 1$ 個小的區間, 其中 $(k-1)e \leq x < ke$, $e = d/(10^{18} - 1) < 10^{-11}$, 且 k 從 $1, 2, \dots, 10^{18} - 1$ 這些數中選取。由鴿籠原理, 在集合 S 的 10^{18} 個數中, 會有兩個數一定落於相同的小區間內, 且他們的差 $a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}c$ 即會給定出所期望的 a, b, c 。

□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱, 或傳真 07-5253809, 或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。