

[雙週一題]網路數學問題徵答  
九十九學年度第一學期

主辦單位: 中山大學應用數學系  
補助單位: 教育部

第五題: 99.11.12 公佈, 99.11.26 中午 12 點截止

設  $f(x, y)$  為正整數值的函數, 其中  $x, y$  為整數, 且滿足

$$f(x, y) = \frac{1}{4}[f(x-1, y) + f(x+1, y) + f(x, y-1) + f(x, y+1)]$$

試證  $f(x, y)$  為一常數。

解答: 若  $f(x, y)$  非常數函數, 則可找到數對  $(x_0, y_0)$ , 滿足  $f(x_0, y_0) = m$  為  $f(x, y)$  的最小值, 可得不等式:

$$f(x_0 + 1, y_0) \geq m$$

$$f(x_0 - 1, y_0) \geq m$$

$$f(x_0, y_0 + 1) \geq m$$

$$f(x_0, y_0 - 1) \geq m$$

若上述四個不等式中, 存在等號不成立時, 那麼可得以下的矛盾式:

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= \frac{f(x_0 + 1, y_0) + f(x_0 - 1, y_0) + f(x_0, y_0 + 1) + f(x_0, y_0 - 1)}{4} \\ &> m = f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

所以會有

$$f(x_0 + 1, y_0) = f(x_0 - 1, y_0) = f(x_0, y_0 + 1) = f(x_0, y_0 - 1) = m$$

即  $f(x_0, y_0)$  的上下左右四個點的函數值等於  $f(x_0, y_0)$  的函數值, 依此類推, 可得所有點的函數值都等於  $f(x_0, y_0)$  的函數值, 故  $f(x, y)$  為常數函數。

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱, 或傳真 07-5253809, 或利用電子郵件信箱 [problem@math.nsysu.edu.tw](mailto:problem@math.nsysu.edu.tw) (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。