

[雙週一題]網路數學問題徵答 九十九學年度第一學期

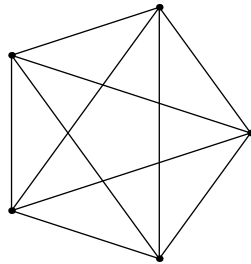
主辦單位: 中山大學應用數學系

補助單位: 教育部

第四題: 99.10.29 公佈, 99.11.12 中午 12 點截止

一隻蟲從一有 k 個點的完全圖的一點出發。在每次移動時，它隨機選擇其它 $k-1$ 個點中的任一個點，並且沿著線段爬行到那個頂點。求此蟲子經過 n 次移動後，回到它一開始出發的點的機率。

完全圖是每對頂點之間都恰連有一條邊的簡單圖，下圖為 5 個點的完全圖：



解答：經過 n 次移動，對於這隻蟲有 $(k-1)^n$ 的可能路徑，但是關鍵在於經過 n 次移動後回到起始點的路徑數與經過 $n-1$ 次移動後沒有回到起始點的路徑數相同。令 B_n 為蟲子在第 n 次回到原點的方法數， O_n 為在第 n 次沒有回到原點的方法數， T_n 為移動 n 次的總方法數，所以會有 $T_n = B_n + O_n$ 。那麼可以寫出下列關係式：

$$\begin{aligned} B_1 &= O_0 = T_1 - O_1 \\ B_2 &= O_1 = T_2 - O_2 \\ B_3 &= O_2 = T_3 - O_3 \\ &\vdots \\ B_n &= O_{n-1} = T_n - O_n \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} B_n &= O_{n-1} \\ &= T_{n-1} - B_{n-1} = T_{n-1} - O_{n-2} && (B_{n-1} = O_{n-2}) \\ &= T_{n-1} - (T_{n-2} - B_{n-2}) \\ &= T_{n-1} - (T_{n-2} - (T_{n-3} - B_{n-3})) && (B_{n-2} = O_{n-3} = T_{n-3} - B_{n-3}) \\ &= T_{n-1} - (T_{n-2} - (T_{n-3} - (T_{n-4} - B_{n-4}))) && (B_{n-3} = O_{n-4} = T_{n-4} - B_{n-4}) \\ &= T_{n-1} - T_{n-2} + T_{n-3} - T_{n-4} + \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} T_{n-i} \end{aligned}$$

因此回到出發點的機率為

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} T_{n-i}}{T_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} (k-1)^{n-i}}{(k-1)^n} = \frac{1 - (1-k)^{1-n}}{k} \quad \square$$

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。