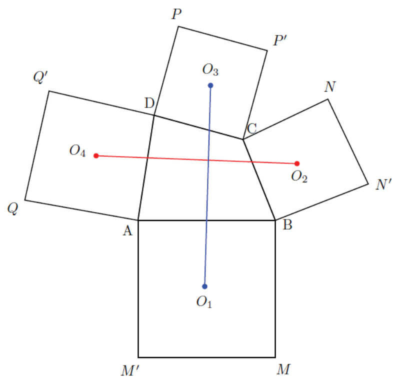
[雙週一題]網路數學問題徵答
九十九學年度第一學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部

第三題：　　　　　　99.10.15 公佈，99.10.29 中午 12 點截止

設 $ABCD$ 爲一凸四邊形，如下圖所示，對每一邊分別往外做正方形 $ABMM'$、$BCNN'$、$CDPP'$ 和 $DAQQ'$，且這四個正方形的中心分別爲 O_1, O_2, O_3, O_4。證明

$$\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4} \quad \text{和} \quad \overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}.$$



解答： 設 O_1, O_2, O_3, O_4 分別爲四邊形 $ABMM', BCNN', CDPP', DAQQ'$ 的中心。定義小寫字母爲座標，而大寫字母爲對應到的頂點；也就是，o_1 爲頂點 O_1 的座標，以此類推。以點 B 爲中心，將點 A 逆時針旋轉 $\frac{\pi}{2}$ 可得到點 M；因此，點 M 的座標爲 $m = b + (a-b)i$。同樣地，也得到另外三個點 N, P, Q 的座標，如下：

$$n = c + (b-c)i, \quad p = d + (c-d)i \quad \text{和} \quad q = a + (d-a)i.$$

所以算出四個正方形的中心點座標，如下：

$$o_1 = \frac{a+m}{2} = \frac{a+b+(a-b)i}{2}, \quad o_2 = \frac{b+c+(b-c)i}{2},$$
$$o_3 = \frac{c+d+(c-d)i}{2}, \quad o_4 = \frac{d+a+(d-a)i}{2}.$$

因爲

$$\frac{o_3-o_1}{o_4-o_2} = \frac{c+d-a-b+i(c-d-a+b)}{a+d-b-c+i(d-a-b+c)} = -i \in i\mathbb{R}^*,$$

所以 $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$。又因爲 $\left|\frac{o_3-o_1}{o_4-o_2}\right| = |-i| = \sqrt{0^2+(-1)^2} = 1$，因此 $\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}$ 即爲所求。 □