

[雙週一題]網路數學問題徵答  
九十九學年度第一學期

主辦單位: 中山大學應用數學系  
補助單位: 教育部

第二題: 99.10.01 公佈, 99.10.15 中午 12 點截止

一函數  $f$  其定義域為所有實數, 且滿足  $f(3+x) = f(3-x)$  與  $f(9+x) = f(9-x)$ 。假如  $x = 0$  為  $f(x) = 0$  的一根, 請問在  $-1000 \leq x \leq 1000$  範圍內,  $f(x) = 0$  最少有幾個根?

解答: 假如  $f(3+x) = f(3-x)$ , 則代入  $t = 3+x$  得  $f(t) = f(6-t)$ , 同理,  $f(t) = f(18-t)$ 。特別的是,

$$f(t) = f(18-t) = f(18-(6-t)) = f(t+12)$$

由於 0 為其中一根, 所以所有 12 的倍數也為根而且任何滿足  $6 \pmod{12}$  的數也為根。

【解法一】

觀察函數

$$f(x) = \sin \frac{\pi x}{12} \sin \frac{\pi(x-6)}{12}$$

會滿足條件。在  $-1000 \leq x \leq 1000$  範圍內, 有 167 個 12 的倍數而且有 166 個數滿足  $6 \pmod{12}$ , 所以根的個數最少為 333。

【解法二】

因為  $6 \pmod{12}$  為 6 的倍數, 12 亦為 6 的倍數, 因此只要為 6 的倍數皆為根, 故正的根有 166 個, 同理, 負的根也有 166 個, 加上 0, 共有 333 個根。□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱, 或傳真 07-5253809, 或利用電子郵件信箱 [problem@math.nsysu.edu.tw](mailto:problem@math.nsysu.edu.tw) (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。