

[雙週一題]網路數學問題徵答
九十七學年度第二學期

主辦單位： 中山大學應用數學系
補助單位： 教育部

第八題： 98.05.29公佈，98.06.12中午12點截止

由1600名議員組成16000個委員會，每個委員會都由80名議員組成，求證一定存在兩個委員會至少有4名相同的議員。

解答： 設第*i*名議員共參加 k_i 個委員會，則

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{1600} = 16000 \times 80$$

另外，我們定義「委員會對」為任意兩個委員會的組合。因為第*i*名議員參加了 k_i 個委員會，所以他參加了 $C_2^{k_i}$ 個委員會對。因此1600名議員構成的委員會對個數為 $C_2^{k_1} + C_2^{k_2} + \cdots + C_2^{k_{1600}}$ 。由柯西不等式可知

$$\left(\sum_{i=1}^{1600} k_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{1600} 1^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^{1600} k_i \right)^2$$

即 $(\sum_{i=1}^{1600} k_i^2) \geq (\sum_{i=1}^{1600} k_i)^2 / 1600$ 。又 $C_2^{k_i} = \frac{k_i!}{2!(k_i-2)!} = \frac{1}{2}k_i(k_i-1)$ ，所以

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{1600} C_2^{k_i} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{1600} k_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{1600} k_i \geq \frac{1}{2} \times \frac{1}{1600} \left(\sum_{i=1}^{1600} k_i \right)^2 - \frac{1}{2} \times 80 \times 16000 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1600} (80 \times 16000)^2 - 40 \times 16000 \\ &= 16000 \times 31960 \end{aligned}$$

此外，16000個委員會共可組成 $C_2^{16000} = 8000 \times 15999$ 個不同的委員會對。而

$$8000 \times 15999 \times 3 = 24000 \times 15999 < 16000 \times 24000 < 16000 \times 31960$$

因此由鴿籠原理可知必有4人有相同的委員會對，等同於其中的兩個委員會至少有4名相同的議員。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。