

[雙週一題]網路數學問題徵答
九十七學年度第二學期

主辦單位： 中山大學應用數學系
補助單位： 教育部

第七題： 98.05.15公佈，98.05.29中午12點截止

試證在邊長為 a 的正方體內部可以做兩個稜長為 a 的正四面體，使得它們沒有交點。(稜長：頂點與頂點所連接的線段長度)

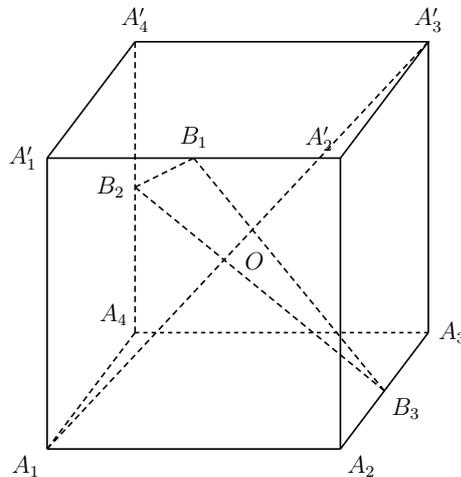
解答： 如下圖，假設此立方體為 $A_1A_2A_3A_4A'_1A'_2A'_3A'_4$ ，其中心為 O 。首先過 O 作垂直於對角線 $A_1A'_3$ 的平面，且和 $A'_1A'_2, A'_4A_4, A_2A_3$ 相交於 B_1, B_2, B_3 。而由商高定理可知

(i) 點 B_1, B_2, B_3 到頂點 A_1 與 A'_3 的距離皆是 $\frac{\sqrt{5}}{2}a$

(ii) $\overline{B_1B_2} = \overline{B_1B_3} = \overline{B_2B_3} = \sqrt{\frac{3}{2}}a$

(iii) $\overline{OA_1} = \overline{OA'_3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

又稜長為 a 的正四面體其高為 $\frac{\sqrt{6}}{3}a < \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，所以錐體 $A_1B_1B_2B_3$ 及 $A'_3B_1B_2B_3$ 內部必各有一稜長為 a 的正四面體分別以 A_1 和 A'_3 為頂點，且兩正四面體彼此不相交。 □



答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。