[雙週一題]網路數學問題徵答
九十七學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第六題: 98.05.01公佈，98.05.15中午12點截止

試找出所有的整數解(x, y, z)使得

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z-1) + 2y(z+1)$$

爲完全平方數。

解答：[參考王嘉慶]
假設$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z-1) + 2y(z+1) = k^2$爲一完全平方數，則$k^2 = (x+y+z)^2 - 2x + 2y$，又$k^2 - (x+y+z)^2 = 2(y-x)$且$x, y, z, k$爲整數，所以$k$和$x+y+z$的奇偶性相同，因此可令$k = x+y+z+2m, m \in \mathbb{Z}$，則

$$(x+y+z+2m)^2 = (x+y+z)^2 - 2x + 2y$$

展開移項化簡後即

$$y - x = 2m(x+y+z+m) \tag{1}$$

故可令

$$y - x = 2mn, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

以下討論m的兩種情況：

(1) 若$m = 0$，則$y = x$，且對任意的整數z，$(x+y+z)^2 - 2x + 2y = (x+y+z)^2$皆爲一完全平方數。

(2) 若$m \neq 0$，令$x = \ell, \ell \in \mathbb{Z}$，則根據式(1)和式(2)可求得

$$y = \ell + 2mn, \quad z = n - 2\ell - 2mn - m$$

且對任意的$\ell, m, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 - 2x + 2y &= [\ell + (\ell + 2mn) + (n - 2\ell - 2mn - m)]^2 \\ &\quad - 2\ell + 2(\ell + 2mn) \\ &= (m+n)^2\end{aligned}$$

皆爲一完全平方數。

綜合(1)、(2)可知，當$(x, y, z) = (\ell, \ell + 2mn, n - 2\ell - 2mn - m)$, $\ell, m, n \in \mathbb{Z}$時，$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z-1) + 2y(z+1)$ 必爲一完全平方數。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『 雙週一題 』信箱，或傳眞07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。