[雙週一題]網路數學問題徵答
九十七學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第五題: 98.04.17公佈，98.05.01中午12點截止

令a, b, c分別爲長方體的長寬高，d爲對角線長，試證

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abcd\sqrt{3}$$

解答：

解法(一) 因爲長方體中的對角線長可表示成

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

所以題目原式可改寫成

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{3} \tag{1}$$

將上式兩邊同時平方後可得

$$(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 \geq 3a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)$$

由於(1)式兩邊皆爲非負，因此原證明等價於證明

$$(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 - 3a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0 \tag{2}$$

而(2)式左邊經由代數運算後可得

$$\begin{aligned}
& (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 - 3a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) \\
= \ & a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 - a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) \\
= \ & \left(\frac{1}{2}a^4b^4 - a^4b^2c^2 + \frac{1}{2}a^4c^4\right) + \left(\frac{1}{2}b^4c^4 - a^2b^4c^2 + \frac{1}{2}b^4a^4\right) \\
& + \left(\frac{1}{2}c^4a^4 - a^2b^2c^4 + \frac{1}{2}c^4b^4\right) \\
= \ & \frac{a^4}{2}(b^2 - c^2)^2 + \frac{b^4}{2}(c^2 - a^2) + \frac{c^4}{2}(a^2 - b^2)^2 \qquad (3)
\end{aligned}$$

又平方有非負的性質，故$(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 - 3a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0$；
由(3)式可輕易推得等號成立於$a = b = c$時，而此時長方體即爲一個立方體。

解法(二) 令$x = a^2, y = b^2, z = c^2$，且長方體中的對角線長可表示成

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{x + y + z}$$

因此原證明等價於證明

$$xy+yz+zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)}$$

因爲上式兩邊皆爲非負，所以等同須證明$(xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$。將前式展開移項整理後可得

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq xyz(x+y+z) \tag{4}$$

所以證明原式等價於證明式(4)。首先宣稱式(4)恆成立。由柯西不等式可知

$$(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)(z^2x^2+x^2y^2+y^2z^2) \geq (xyz(x+y+z))^2$$

即$(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)^2 \geq (xyz(x+y+z))^2$。因爲$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$和$xyz(x+y+z)$皆爲非負，所以

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq xyz(x+y+z)$$

得證原式恆成立。

解法(三) 令$x=a^2, y=b^2, z=c^2$，且長方體中的對角線長可表示成

$$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{x+y+z}$$

因此原證明等價於證明

$$xy+yz+zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)} \tag{5}$$

首先宣稱式(5)恆成立。由排序不等式中的順序和不小於亂序和可知

$$(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2 \geq xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy$$

將上式兩邊同時加上$2xyz(x+y+z)$且經由整理後可得

$$(xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$$

因爲$xy+yz+zx$和$3xyz(x+y+z)$皆爲非負，所以

$$xy+yz+zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)}$$

得證原式恆成立。 □

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『 雙週一題 』信箱，或傳眞07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。