

[雙週一題]網路數學問題徵答
九十七學年度第二學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部

第四題： 98.04.03公佈，98.04.17中午12點截止

請找出下列方程組所有解(x, y, z 為非零實數)：

$$6(x - y^{-1}) = 3(y - z^{-1}) = 2(z - x^{-1}) = xyz - (xyz)^{-1}$$

解答：

解法(一) 假設 $a = xyz, b = \frac{1}{xyz}$ ，則

$$\begin{aligned}(x - y^{-1}) &= \frac{a}{6} - \frac{b}{6} \\(y - z^{-1}) &= \frac{a}{3} - \frac{b}{3} \\(z - x^{-1}) &= \frac{a}{2} - \frac{b}{2}\end{aligned}$$

將上述三式相加可得

$$(x - y^{-1}) + (y - z^{-1}) + (z - x^{-1}) = a - b = xyz - \frac{1}{xyz}$$

接著將上式移項後，再經由因式分解可得

$$(x - y^{-1})(y - z^{-1})(z - x^{-1}) = 0$$

因此 $(x - y^{-1}), (y - z^{-1}), (z - x^{-1})$ 其中一式為0，所以由題目原式可得

$$xy = yz = zx = 1, \quad (xyz)^2 = 1$$

由上兩式可知其解為 $(1, 1, 1)$ 或 $(-1, -1, -1)$ 。

解法(二) 假設原式等於 k ，則

$$(x - y^{-1}) = \frac{k}{6}, \quad (y - z^{-1}) = \frac{k}{3}, \quad (z - x^{-1}) = \frac{k}{2} \quad (1)$$

將(1)中三式相乘可得 $(x - y^{-1})(y - z^{-1})(z - x^{-1}) = k^3/36$ ，左式展開後即

$$(xyz - (xyz)^{-1}) - (x + y + z - x^{-1} - y^{-1} - z^{-1}) = \frac{k^3}{36}$$

又(1)中三式相加可得 $x + y + z - x^{-1} - y^{-1} - z^{-1} = k$ 且由假設可知 $xyz - (xyz)^{-1} = k$ ，因此 $k^3/36 = 0$ ，即 $k = 0$ 。所以

$$xy = yz = zx = 1, \quad (xyz)^2 = 1$$

由上兩式可知其解為 $(1, 1, 1)$ 或 $(-1, -1, -1)$ 。

□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。