

[雙週一題]網路數學問題徵答
九十七學年度第二學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部

第三題： 98.03.20公佈，98.04.03中午12點截止

試找出所有的實數解 (x_1, x_2, x_3, x_4) 滿足

$$\begin{aligned}x_1 - \frac{1}{x_1} &= 2x_2 \\x_2 - \frac{1}{x_2} &= 2x_3 \\x_3 - \frac{1}{x_3} &= 2x_4 \\x_4 - \frac{1}{x_4} &= 2x_1\end{aligned}$$

解答：觀察正切函數的二倍角公式 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ ，利用 $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$ 代入，則可得到

$$2 \cot 2\alpha = \cot \alpha - \frac{1}{\cot \alpha}$$

假設 $x_1 = \cot \alpha$ ， $\alpha \in (0, \pi)$ ，從第一式可知 $x_2 = \cot 2\alpha$ ，第二式可知 $x_3 = \cot 4\alpha$ ，第三式可知 $x_4 = \cot 8\alpha$ ，且最後一式可得到 $x_1 = \cot 16\alpha$ ，由此可知 $\cot \alpha = \cot 16\alpha$ ，因此存在整數 k 滿足 $16\alpha - \alpha = k\pi$ ，所以 $\alpha = \frac{k\pi}{15}$ ，又 $\alpha \in (0, \pi)$ ，可得 $0 < k < 15$ 。因此所有的實數解為

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\cot \frac{k\pi}{15}, \cot \frac{2k\pi}{15}, \cot \frac{4k\pi}{15}, \cot \frac{8k\pi}{15} \right), \quad k = 1, 2, \dots, 14 \quad \square$$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw（主旨為「雙週一題」）。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。