[雙週一題]網路數學問題徵答
九十七學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第二題: 98.03.06公佈，98.03.20中午12點截止

設

$$x + x^{-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

試計算$x^{2000} + x^{-2000}$之值。

解答：

解法(一) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$即爲黃金比例，而黃金三角形也會出現此值。所謂的黃金三角形是角度爲$\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$的等腰三角形，如下圖所示。在$\triangle ABC$中，$\angle B = \angle C = \frac{2\pi}{5}$，若$\overline{CD}$爲$\angle ACB$的角平分線，則$\angle ACD = \angle DCB = \frac{\pi}{5}$且$\angle CDB = \frac{2\pi}{5}$，因此(1)$\triangle BCD$和$\triangle CDA$皆爲等腰三角形，可得$\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$；(2)利用三角形$AAA$相似性質可得$\triangle ABC \sim \triangle CDB$。所以由(1)(2)可知$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{(\overline{AB}-\overline{BC})}$成立，又邊長長度爲正，經由代數運算可得$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$。接著，由三角形的正弦定理可知

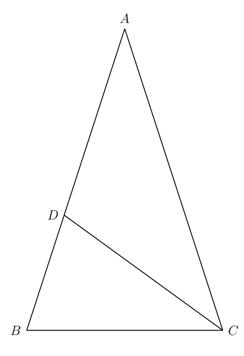
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = 2\cos\frac{\pi}{5}$$

所以$2\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

因題目爲$x + x^{-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{5}$，可令$x = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$，得到$\frac{1}{x} = \cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}$，再利用棣美弗定理得

$$x^{2000} = \cos\frac{2000\pi}{5} + i\sin\frac{2000\pi}{5} = 1$$
$$\frac{1}{x^{2000}} = \cos\frac{2000\pi}{5} - i\sin\frac{2000\pi}{5} = 1$$

所以所求之值爲2。



解法(二) 將原式兩邊同乘$2x$再減去x可得

$$2x^2 - x + 2 = \sqrt{5}x$$

接著將上式兩邊平方後再減去$5x^2$可得

$$4x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 4 = 0$$

最後將上式兩邊同乘$(x+1)$可得$4x^5 + 4 = 0$。所以$x^5 = -1$，而

$$x^{2000} + x^{-2000} = (x^5)^{400} + (x^5)^{-400} = 2 \qquad \square$$