

[雙週一題]網路數學問題徵答
九十八學年度第一學期

主辦單位：中山大學應用數學系

補助單位：教育部

第八題：

98.12.25公佈，98.01.08中午12點截止

有六隻螞蟻同時站在正八面體的相異六個頂點上，然後這六隻螞蟻同時且獨立的移動至與其原本所站之頂點相鄰的四個頂點之一，移動至每一個頂點的機率皆相同，試求沒有任何兩隻螞蟻會在同一個頂點相遇的機率為多少？

解答：假設此正八面體的六個頂點為 A, B, C, A', B', C' ，其中 A', B', C' 分別為與 A, B, C 相對的頂點，則可分為以下的討論

- (1) 螞蟻之原頂點為 A 或 A' ：則可移動至 B, C, B', C' 四個頂點。
- (2) 螞蟻之原頂點為 B 或 B' ：則可移動至 A, C, A', C' 四個頂點。
- (3) 螞蟻之原頂點為 C 或 C' ：則可移動至 A, B, A', B' 四個頂點。

則題意可視為從三個集合

$$\{B, C, B', C'\}, \{A, C, A', C'\}, \{A, B, A', B'\}$$

各抽取出兩個元素，組成六個相異的新頂點(螞蟻所移動到的位置)，共會有多少種滿足題意的抽取法？

在第一個集合中可能選取出來的兩元素情況如下：

- (1) 為兩相對的頂點(B, B' 或 C, C')：因被選的元素(假設為 B, B')在其他兩集合中必不可再被選擇，所以另兩集合為

$$\{A, C, A', C'\}, \{A, A'\}$$

則第三個集合必定只能選擇 A, A' 兩頂點，而第二個集合也只能唯一選擇 C, C' 兩頂點，故共有 $2 \times 1 \times 1 = 2$ 種選法。

- (2) 為不相對的頂點(B, C 或 B, C' 或 B', C 或 B', C')：因被選的元素(假設為 B, C)在其他兩集合中必不可再被選擇，所以另兩集合為

$$\{A, A', C'\}, \{A, A', B'\}$$

而因頂點 C' 與 B' 皆唯一出現在第二與第三個集合中，則必定要選取(若沒被選取到，則必會有螞蟻走至同一頂點)，所以在第二個集合中有 A, A' 兩種元素可以選擇，故共有 $4 \times 2 \times 1 = 8$ 種取法。

但在各集合中所挑選出來的兩元素，可各別由兩隻螞蟻所行走，故所求機率為

$$\frac{(2+8) \times 2 \times 2 \times 2}{4^6} = \frac{80}{4096} = \frac{5}{256}$$

□

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」)。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。