[雙週一題]網路數學問題徵答
九十八學年度第一學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部

第六題:　98.11.27公佈，98.12.11中午12點截止

給定三顆相同的n面骰子($n = 4, 5, 6, \ldots$，且骰子不一定為正多面體)，三顆骰子上的相對應位置皆標上相同的任意整數。例如：五面骰子標上點數$12, -7, 5, 32, 5$。若隨機投擲三顆骰子，試證三顆骰子底面點數和可被3整除的機率大於或等於$\frac{1}{4}$。

解答：【**解法一**】 假設x, y, z分別為底部點數除以3餘$0, 1, 2 \pmod 3$的機率，且P為三顆骰子底部點數和可被3整除的機率，則可知道點數和只有在$(0,0,0), (1,1,1), (2,2,2)$及$(0,1,2)$才可被3整除，又因$(0,1,2)$有六種排列方式，因此

$$P = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz$$

其中$x + y + z = 1$且$x, y, z \geq 0$。

不失一般性，假設$x \geq y \geq z$，則可知$x \geq \frac{1}{3}$，題目相當於證明若$P \geq \frac{1}{4}$時，則$1 + 12xyz \geq 4(yx + zx + xy)$成立。

【證明】
利用公式$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$兩次，並利用$x + y + z = 1$的條件。因為

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 + 6xyz \\ &= (x+y)^3 + z^3 - 3xy(1-z) + 6xyz \\ &= (x+y+z)^3 - 3(x+y)z(x+y+z) - 3xy + 9xyz \\ &= 1 - 3(xz + yz) - 3xy + 9xyz \\ &= 1 - 3(xy + xz + yz) + 9xyz \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz \geq \frac{1}{4} &\Leftrightarrow 1 - 3(xy + xz + yz) + 9xyz \geq \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow 1 + 12xyz \geq 4(xy + xz + yz) \end{aligned} \qquad \square$$

不等式可改寫為

$$\begin{aligned} 1 + 4yz(3x - 1) \geq 4(zx + xy) &= 4x(1 - x) && (1) \\ &= -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 && (2) \end{aligned}$$

因為$3x - 1 \geq 0$，所以(1)的左式大於等於1，而(1)的右式由(2)得小於等於1，故得證。

【解法二】【參考參賽者黃信淳老師解答】
令擲一顆骰子，擲出的數字，可以被3整除的機率爲p，被3除餘1的機率爲q，被3除餘2的機率爲r，所以$p+q+r=1, 0\leq p\leq 1, 0\leq q\leq 1, 0\leq r\leq 1$，則依本題之題意即證明

$$p^3+q^3+r^3+6pqr\geq\frac{1}{4}$$

又因爲

$$1=(p+q+r)^3=(p^3+q^3+r^3+6pqr)+3pq(p+q)+3qr(q+r)+3rp(r+p)$$

所以

$$\begin{aligned}p^3+q^3+r^3+6pqr\geq\frac{1}{4}&\Leftrightarrow 3pq(p+q)+3qr(q+r)+3rp(r+p)\leq\frac{3}{4}\\&\Leftrightarrow pq(p+q)+qr(q+r)+rp(r+p)\leq\frac{1}{4}\\&\Leftrightarrow pq(1-r)+qr(1-p)+rp(1-q)\leq\frac{1}{4}\\&\Leftrightarrow pq+qr+rp-3pqr\leq\frac{1}{4}\end{aligned}$$

又因爲

$$\begin{aligned}(1-3p)(1-3q)(1-3r)&=1-3(p+q+r)+9(pq+qr+rp)-27pqr\\&=-2+9(pq+qr+rp-3pqr)\end{aligned}$$

所以$pq+qr+rp-3pqr\leq\frac{1}{4}\Leftrightarrow(1-3p)(1-3q)(1-3r)\leq\frac{1}{4}$。

引理：已知$p+q+r=1, 0\leq p\leq 1, 0\leq q\leq 1, 0\leq r\leq 1$，則$(1-3p)(1-3q)(1-3r)\leq\frac{1}{4}$。

【證明】
因爲$p+q+r=1$，所以p,q,r不可能皆大於$\frac{1}{3}$或是皆小於$\frac{1}{3}$，故$(1-3p),(1-3q),(1-3r)$可分爲三種情形：兩正一負、兩負一正、至少有一爲零。

i. 若爲兩正一負，則$(1-3p)(1-3q)(1-3r)<0$。
ii. 落爲至少有一爲零，則$(1-3p)(1-3q)(1-3r)=0$。
iii. 若爲兩負一正，不失一般性假設$1-3p<0, 1-3q<0, 1-3r>0$，則$(1-3p)(1-3q)(1-3r)=(3p-1)(3q-1)(1-3r)$，由上式可以觀察出若$p,q$越大，$r$越小，則$(1-3p)(1-3q)(1-3r)$越大，且$p+q+r=1, \frac{1}{3}<p\leq 1, \frac{1}{3}<q\leq 1, 0\leq r<\frac{1}{3}$，故可推斷出$(1-3p)(1-3q)(1-3r)$有最大值時$r=0$。

   經簡化後可得$(3p-1)(3q-1)(3r-1)=(3p-1)(3q-1)$且$p+q=1, \frac{1}{3}<$

$p \leq 1, \frac{1}{3} < q \leq 1$，由算幾不等式

$$\frac{(3p-1)+(3q-1)}{2} \geq \sqrt{(3p-1)(3q-1)} \Rightarrow \frac{1}{4} \geq (3p-1)(3q-1)$$

由i,ii,iii可知引理得證。 □

在$p+q+r=1, 0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1, 0 \leq r \leq 1$的前提下，

$$\begin{aligned} p^3+q^3+r^3+6pqr \geq \frac{1}{4} &\Leftrightarrow pq+qr+rp-3pqr \leq \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow (1-3p)(1-3q)(1-3r) \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

由引理得知$(1-3p)(1-3q)(1-3r) \leq \frac{1}{4}$，故$p^3+q^3+r^3+6pqr \geq \frac{1}{4}$且等號成立時，$p, q, r$三者中有兩者爲$\frac{1}{2}$，另一者爲0。 □