[雙週一題]網路數學問題徵答
九十八學年度第一學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第四題: 98.10.30公佈，98.11.13中午12點截止

四個半徑爲1的球相切，三個放在地板上，第四個放置在其他三個上面，作一個稜長爲s的正四面體外切這些球，試求s之值爲多少？

解答：【解法一】 讓一個較小的正四面體只包圍一顆球，其底面平行大四面體底面，如圖二所示。令小正四面體的稜長爲t，之後建立一四邊形$C_1B_1B_2C_2$，其中C_1和C_2爲爲兩球的中心。根據四面體的結構，邊長$\overline{C_1B_1}$和$\overline{C_2B_2}$會互相平行且等長，

$$\overline{B_1B_2} = \overline{C_1C_2} = 1 + 1 = 2$$

因此$s = t + 2$。

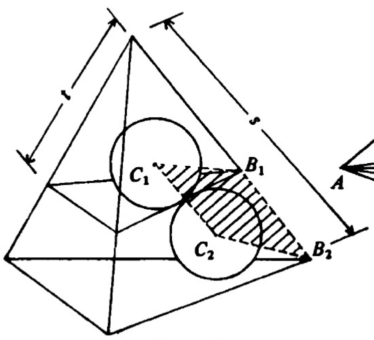


Figure 1

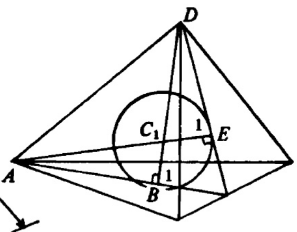


Figure 2

在$\triangle ABC$中，$\overline{AC}$比小正四面體的垂線$\overline{DB}$和$\overline{AE}$的長度b來得短；因爲B爲底面的重心，則$\overline{AB}$長度可表示爲$\frac{2}{3}(\sqrt{3}/2)t$。對於$\triangle ABC$，利用畢氏定理，可知

$$(b-1)^2 = 1^2 + \left[\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]^2 \tag{1}$$

對於$\triangle ADB$，利用畢氏定理，可知

$$t^2 = b^2 + \left[\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]^2 \tag{2}$$

用聯立方程式(1)(2)，解出$t = 2\sqrt{6}$，故$s = 2 + t = 2 + 2\sqrt{6}$。

【解法二】 假設由四顆球中心所組成的正四面體爲T，再計算正四面體T中心到每一面的距離d，我們可以擴大T，使得由中心至每一面的距離均增加1(球的半

徑)，而得到一新的四面體T'，稜長爲e'，因爲T和T'相似，且T的稜長爲2，

$$\frac{e'}{2} = \frac{d+1}{d} \tag{3}$$

將T的中心放在坐標軸的中心，則T到四個項點的四個向量分別爲c_1, c_2, c_3, c_4，長度均爲c，合力爲$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$，

$$-c_1 = c_2 + c_3 + c_4 \tag{4}$$

利用內積公式，等式(4)兩邊同乘以向量c_1，

$$\begin{aligned}
-c_1 \cdot c_1 = -c^2 &= c_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_3 + c_1 \cdot c_4 \\
&= |c_1| \cdot |c_2| \cdot \cos\theta + |c_1| \cdot |c_3| \cdot \cos\theta + |c_2| \cdot |c_3| \cdot \cos\theta \\
&= 3c^2 \cos\theta
\end{aligned}$$

其中θ爲向量c_i與c_j的夾角，$i \neq j$。因此

$$\cos\theta = -\frac{1}{3}$$

因爲T的稜長平方爲

$$|c_1 - c_2|^2 = 4 = 2c^2 - 2c^2\cos\theta = c^2\left(2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}c^2$$

所以

$$c = \sqrt{3/2} \tag{5}$$

因爲T的垂線會通過質心，所以d可用向量表示$\frac{1}{3}(c_2 + c_3 + c_4)$，利用(4)，

$$d = |\frac{1}{3}(c_2 + c_3 + c_4)| = \frac{1}{3}c$$

再將(5)所求得c值代入，

$$d = (1/3)\sqrt{3/2} = 1/\sqrt{6}$$

將d值代入(3)，故解爲

$$e' = 2\frac{d+1}{d} = 2\frac{(1/\sqrt{6})+1}{1/\sqrt{6}} = 2 + 2\sqrt{6}$$

【解法三】 【參考參賽者楊玉星老師解答】

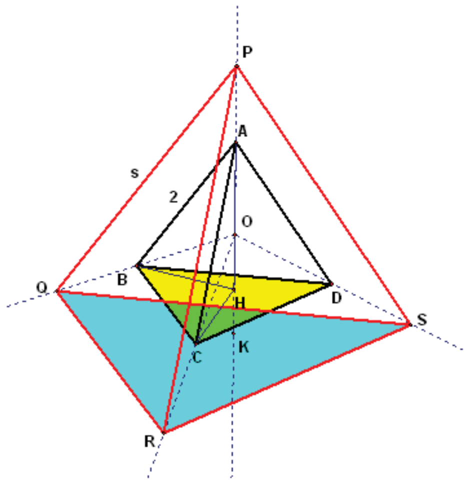
i. 如下圖，設四個球的球心分別爲A,B,C,D，則$ABCD$爲一稜長爲2的正四面體。

設正四面體外接球的球心爲O，外接圓半徑爲$R=\overline{OA}=\overline{OB}$，內接圓半徑爲$r$，則

$$\begin{cases} R+r &= \overline{AH} \\ R^2-r^2 &= \overline{BH}^2 \end{cases}$$

而

$$\overline{BH}=\frac{2}{3}\times\sqrt{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\overline{AH}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{4-\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$



ii. 設正四面體PQRS外接這些球，顯然地，點O也是正四體PQRS的外接球球心，令$\overline{OP}=\overline{OQ}=R',\overline{OK}=r'$，同理可得$R':r'=3:1,\overline{PK}=\frac{\sqrt{6}}{3}s$，又$r'=\overline{OK}=\overline{OH}+\overline{HK}=\frac{\sqrt{6}}{6}+1=\frac{\sqrt{6}+6}{6}$，所以$\overline{PK}=R'+r'=4r'=\frac{2(\sqrt{6}+6)}{3}$，故$\frac{\sqrt{6}}{3}s=\frac{2(\sqrt{6}+6)}{3}\Rightarrow s=2+2\sqrt{6}$。 □

答案請寄至–高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。