[雙週一題]網路數學問題徵答
九十八學年度第一學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第三題: 98.10.16公佈，98.10.30中午12點截止

設n爲≥ 3的正整數，α,β,γ爲複數且滿足$\alpha^n=\beta^n=\gamma^n=1,\alpha+\beta+\gamma=0$。證明$n$爲3的倍數。

解答：**【解法一】** 不失一般性可設$\alpha=1$(在$\alpha+\beta+\gamma=0$的兩邊同除以α得$1+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}=0$，令$\alpha_1=1,\beta_1=\frac{\beta}{\alpha},\gamma_1=\frac{\gamma}{\alpha}$)，且$0\leq\arg\beta<\arg\gamma\leq 2\pi$。

因爲$\beta^n=\gamma^n=1$，可知β,γ的模(絕對值)爲1，所以(β,γ)所成集合相當於在單位圓上(圓心$(0,0)$，半徑1)，如下圖所示。

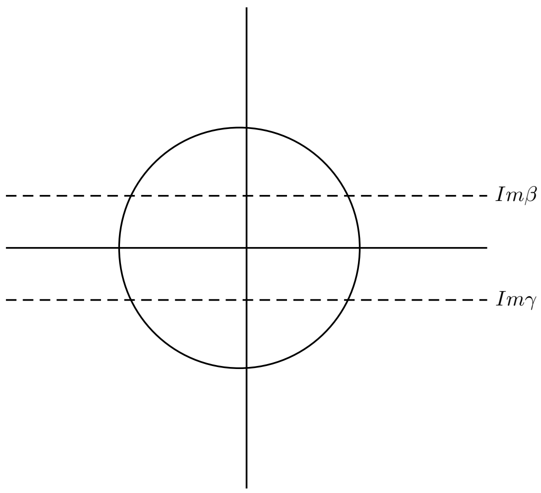
由於方程式$\beta+\gamma=-1$，可令β,γ的虛部互爲相反數，

$$\mathrm{Im}(\beta+\gamma)=\mathrm{Im}(\beta)+\mathrm{Im}(\gamma)=0 \tag{1}$$

或$\mathrm{Im}(\beta)=-\mathrm{Im}(\gamma)$；$\beta,\gamma$的實部關係爲

$$\mathrm{Re}(\beta)+\mathrm{Re}(\gamma)=-1 \tag{2}$$

由題意可知$|\beta|=|\gamma|=1$，因此$\mathrm{Re}(\beta)=\mathrm{Re}(\gamma)=-\frac{1}{2}$，同時滿足(1)與(2)的$\beta=e^{\frac{2\pi i}{3}},\gamma=e^{\frac{4\pi i}{3}}$。由$\beta^n=1$推得$e^{\frac{2\pi in}{3}}=1$，這僅在$n$爲3的倍數時出現。



【解法二】 【參考參賽者王嘉慶老師】
令複數平面上的三個點A,B,C分別表示複數α,β,γ。因爲

$$\alpha^n=\beta^n=\gamma^n=1\Rightarrow|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$$

所以A,B,C都在單位圓上，故原點O爲$\triangle ABC$的外心。

又$\alpha+\beta+\gamma=0$，所以原點O爲$\triangle ABC$的重心。

假設M爲$\overline{BC}$的中點，則因爲O爲$\triangle ABC$的重心，所以A,O,M共線。

因爲O爲$\triangle ABC$的外心，所以O在$\overline{BC}$的中垂線上；因爲M爲$\overline{BC}$的中點，所以M也在$\overline{BC}$的中垂線上；故A也在$\overline{BC}$的中垂線上，於是可知$\overline{AB}=\overline{AC}$。同理可證得$\overline{BA}=\overline{BC}$，故$\triangle ABC$爲正三角形。

不妨設A,B,C在單位圓上依序爲逆時針方向排列，則

$$\begin{aligned}
&\beta=\alpha\cdot(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)\\
\Rightarrow&\beta^n=\alpha^n\cdot(\cos 120n^\circ+i\sin 120n^\circ)\\
\Rightarrow&1=1\cdot(\cos 120n^\circ+i\sin 120n^\circ)\\
\Rightarrow&1=\cos 120n^\circ+i\sin 120n^\circ\\
\Rightarrow&120n^\circ=360k^\circ,\quad \text{其中}k\in\mathbb{Z}\\
\Rightarrow&n=3k,\quad \text{其中}k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

故n爲3的倍數。

【解法三】 【參考參賽者洪允東老師之解法二】
$\alpha^n=\beta^n=\gamma^n=1\Rightarrow\alpha,\beta,\gamma$皆爲$z^n=1$的根，故可令

$$\begin{cases}\alpha=\cos\frac{2a\pi}{n}+i\sin\frac{2a\pi}{n}\\ \beta=\cos\frac{2b\pi}{n}+i\sin\frac{2b\pi}{n}\\ \gamma=\cos\frac{2c\pi}{n}+i\sin\frac{2c\pi}{n}\end{cases},a,b,c\in\mathbb{Z}$$

由題意可知

$$\alpha+\beta+\gamma=\left(\cos\frac{2a\pi}{n}+\cos\frac{2b\pi}{n}+\cos\frac{2c\pi}{n}\right)+i\left(\sin\frac{2a\pi}{n}+\sin\frac{2b\pi}{n}+\sin\frac{2c\pi}{n}\right)=0$$

則

$$\begin{cases}\cos\frac{2a\pi}{n}+\cos\frac{2b\pi}{n}+\cos\frac{2c\pi}{n}&=0\\ \sin\frac{2a\pi}{n}+\sin\frac{2b\pi}{n}+\sin\frac{2c\pi}{n}&=0\end{cases}$$

移項且平方可得

$$\begin{cases}\left(\cos\frac{2a\pi}{n}+\cos\frac{2b\pi}{n}\right)^2&=\left(-\cos\frac{2c\pi}{n}\right)^2\\ \left(\sin\frac{2a\pi}{n}+\sin\frac{2b\pi}{n}\right)^2&=\left(-\sin\frac{2c\pi}{n}\right)^2\end{cases}\tag{3}$$

(3)兩式相加整理可得

$$1+1+2\left(\cos\frac{2a\pi}{n}\cos\frac{2b\pi}{n}+\sin\frac{2a\pi}{n}\sin\frac{2b\pi}{n}\right)=1 \tag{4}$$

$$2\cos\left(\frac{2a\pi}{n}-\frac{2b\pi}{n}\right)=-1 \tag{5}$$

$$\cos\frac{2(a-b)\pi}{n}=-\frac{1}{2} \tag{6}$$

由(6)可知$\frac{2(a-b)\pi}{n}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$或$\frac{2(a-b)\pi}{n}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$。

分兩種情況討論：

i. 若$\frac{2(a-b)\pi}{n}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$，則

$$\begin{aligned}\frac{(a-b)\pi}{n}&=\frac{\pi+3k\pi}{3}\\ n(3k+1)&=3(a-b)\end{aligned}$$

可知$3|n(3k+1)$，又$(3,3k+1)=1$，因此$3|n$。

ii. 若$\frac{2(a-b)\pi}{n}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$，則

$$\begin{aligned}\frac{(a-b)\pi}{n}&=\frac{2\pi+3k\pi}{3}\\ n(3k+2)&=3(a-b)\end{aligned}$$

可知$3|n(3k+2)$，又$(3,3k+2)=1$，因此$3|n$。

由(i),(ii)知n爲3的倍數。 $\square$