[雙週一題]網路數學問題徵答
九十八學年度第一學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部

第二題:　　98.10.02公佈，98.10.16中午12點截止

計算$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n}\right\}$的值，其中$\{a\}$表示$a$的小數部分，如$\{3.2\}=0.2$。

解答： i. 因為$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$，所以可利用二項式定理證明$(1+\sqrt{2})^{2n}+(1-\sqrt{2})^{2n}$亦為一整數，對於所有正整數$n$均成立。

$$
\begin{aligned}
&(1+\sqrt{2})^{2n}+(1-\sqrt{2})^{2n}\\
=&\binom{2n}{0}1^0\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{2n}+\binom{2n}{1}1^1\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{2n-1}+\cdots+\binom{2n}{2n}1^{2n}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{0}\\
&\quad+\binom{2n}{0}1^0\cdot(-\sqrt{2})^{2n}+\binom{2n}{1}1^1\cdot(-\sqrt{2})^{2n-1}+\cdots+\binom{2n}{2n}1^{2n}\cdot(-\sqrt{2})^{0}\\
=&\binom{2n}{0}1^0\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{2n}+\binom{2n}{1}1^1\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{2n-1}+\cdots+\binom{2n}{2n}1^{2n}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{0}\\
&\quad+\binom{2n}{0}1^0\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{2n}-\binom{2n}{1}1^1\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{2n-1}+\cdots+\binom{2n}{2n}1^{2n}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{0}\\
=&2\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}1^{2i}\left(\sqrt{2}\right)^{2n-2i}
\end{aligned}
$$

因為$2n-2i=2(n-i)$為偶數，所以$(\sqrt{2})^{2n-2i}=2^{n-i}$必為整數且$\binom{2n}{2i}$也為整數，所以$(1+\sqrt{2})^{2n}+(1-\sqrt{2})^{2n}$為一整數，得證。

ii. 因為$\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}<1,\forall n$，所以

$$\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}\right\}=1-\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}$$

則由i,ii可知，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}\right\}=1-\lim_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}=1-0=1\qquad\square$$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『 雙週一題 』信箱，或傳真07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」) 。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。