[雙週一題]網路數學問題徵答
九十八學年度第一學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第一題: 98.09.18公佈，98.10.02中午12點截止

設x, y, n皆為自然數，在給定n之情況下，求$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$的所有解$(x, y)$和解的個數。(請列出所有解的通式)

解答： 對n作質因數分解得到$n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$，其中$p_i$為相異質數，而$i = 1, \ldots, k$，而且$m_1, m_2, \ldots, m_k$皆為自然數。

經化簡得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{n}$$

即

$$xy - n(x+y) = 0$$

利用因式分解法可得

$$\begin{aligned}(x-n)(y-n) &= n^2 \\ &= p_1^{2m_1} \cdot p_2^{2m_2} \cdots p_k^{2m_k}\end{aligned}$$

由條件可知，x, y為大於n的數，因此$x-n$為$p_1^{2m_1} \cdot p_2^{2m_2} \cdots p_k^{2m_k}$的正因數，可記為

$$x - n = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdots p_k^{i_k}, \quad \text{其中 } i_j = 0, 1, \ldots, 2m_j,\ j = 1, 2, \ldots, k$$

則所有解為

$$\begin{cases} x &= n + p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdots p_k^{i_k} \\ y &= n + p_1^{2m_1-i_1} \cdot p_2^{2m_2-i_2} \cdots p_k^{2m_k-i_k} \end{cases}$$

其中$i_j = 0, 1, \ldots, 2m_j,\ j = 1, 2, \ldots, k$，且解的個數為

$$(1+2m_1)(1+2m_2)\cdots(1+2m_k)$$

□

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『 雙週一題 』信箱，或傳眞07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」) 。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。