[雙週一題]網路數學問題徵答
九十六學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第一題: 97.02.22公佈，97.03.07中午12點截止

令 a 與 b 皆為實數且滿足

$$\sin a + \sin b = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{1}$$

$$\cos a + \cos b = \frac{\sqrt{6}}{2} \tag{2}$$

試求出 $\sin(a+b)$ 之值。

解答：

(解法一)

先將 (1), (2) 兩式平方後相加，則得到

$$\sin^2 a + \sin^2 b + 2(\sin a \sin b) + \cos^2 a + \cos^2 b + 2(\cos a \cos b) = \frac{2}{4} + \frac{6}{4} = 2$$

化簡後可得

$$2(\cos a \cos b + \sin a \sin b) = 2\cos(a-b) = 0 \Rightarrow \cos(a-b) = 0 \tag{3}$$

之後，我們將 (1), (2) 兩式相乘，則得到

$$\begin{aligned}
&\sin a \cos a + \sin a \cos b + \sin b \cos a + \sin b \cos b = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Rightarrow &2\sin a \cos a + 2\sin b \cos b + 2(\sin a \cos b + \sin b \cos a) = \sqrt{3} \\
\Rightarrow &\sin 2a + \sin 2b + 2\sin(a+b) = \sqrt{3} \\
\Rightarrow &\sin 2a + \sin 2b = \sqrt{3} - 2\sin(a+b)
\end{aligned} \tag{4}$$

而由三角函數的和差化積公式我們可得知

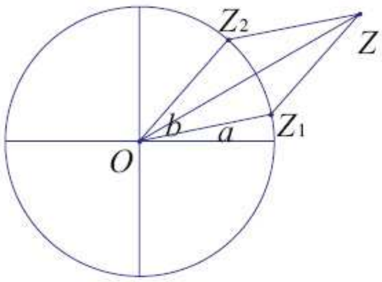
$$\sin 2a + \sin 2b = 2\sin(a+b)\cos(a-b) \tag{5}$$

最後，由 (3), (4), (5) 三式之結果可得到

$$\sin 2a + \sin 2b = \sqrt{3} - 2\sin(a+b) = 2\sin(a+b)\cos(a-b) = 0$$
$$\Rightarrow \sin(a+b) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \square$$

(解法二)

我們假設兩複數 $z_1 = \cos a + i\sin a = \text{cis } a$, $z_2 = \cos b + i\sin b = \text{cis } b$。在複數平面上，我們可知此兩點皆爲單位圓上的點，我們另外假設一複數 z，令 z 爲 z_1 及 z_2 之和，則此三複數在複數平面上的關係如下圖所示：



則

$$\begin{aligned} z =& z_1 + z_2 = r\text{cis } \frac{a+b}{2} = \text{cis } a + \text{cis } b \\ =& \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\text{cis } \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

由此結果我們可得知，z 在複數平面上爲半徑是 $\sqrt{2}$ 之圓上的一點，且其角度 $\frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{6}$，因此

$$\sin(a+b) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \square$$

(解法三)

利用和差化積公式我們可將 (1), (2) 兩式改寫為

$$(1) \Rightarrow 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{6}$$

$$(2) \Rightarrow 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} \tag{7}$$

$$(6) \div (7) \Rightarrow \tan\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

另外，由二倍角公式我們可知

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$$

因此

$$\sin(a+b) = \frac{2\tan\left(\frac{a+b}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a+b}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \square$$

答案請寄至–高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。