[雙週一題]網路數學問題徵答
九十七學年度第一學期

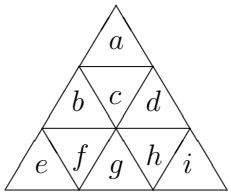
主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第七題: 97.12.12公佈，97.12.26中午12點截止

如下圖，將數字1到9不重複的任意標記成a到i排列在三角形中，使得每個2×2三角形內的值加起來皆爲n，即

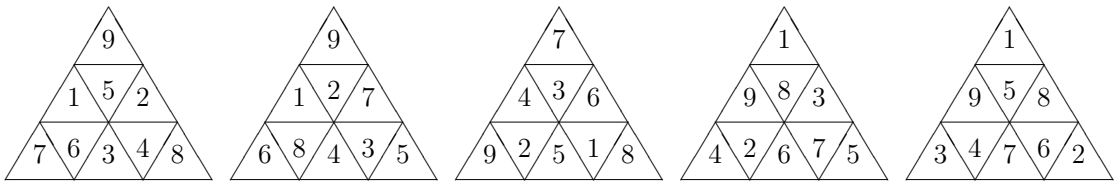
$$a+b+c+d=b+e+f+g=d+g+h+i=n$$

試對於每個可行的n值，給出如下圖的排列(也就是將a到i和n，填入可行的數字)，並證明對於其它的n值，沒有任何排列能滿足上式。



n

解答： 可能的n值爲$17, 19, 20, 21, 23$，如下圖所示



17 19 20 21 23

首先證明$17\le n\le 23$。因爲

$$\begin{aligned}3n&=(a+b+c+d)+(b+e+f+g)+(d+g+h+i)\\&=\sum_{i=1}^{9}i+b+d+g\\&=45+b+d+g\end{aligned}$$

且$b+d+g$介於$1+2+3=6$和$7+8+9=24$之間，所以n介於$\frac{45+6}{3}=17$和$\frac{45+24}{3}=23$之間，因此需考慮的n爲18和22。注意到，如果$n=18$無法構造出，則$n=22$也是無法構造出，即只要將各三角形內的數字x取代成$10-x$，因此我們只需考慮$n=18$。$n=18$即$b+d+g=3\times 18-45=9$，因爲b,d,g的可能值爲1到9，所

以b, d, g皆不可能爲9。不失其一般性，令9爲a，則

$$\begin{aligned} & 18 = a + b + c + d = 9 + c + (b + d + g) - g = 9 + 9 + c - g \\ \Leftrightarrow\ & 0 = c - g \\ \Leftrightarrow\ & c = g \end{aligned}$$

然而$c \neq g$，所以矛盾，因此$n = 18, 22$無法被構造出。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。