[雙週一題]網路數學問題徵答
九十七學年度第一學期

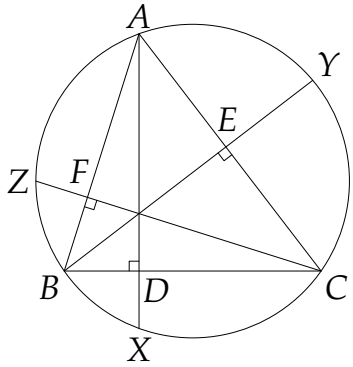
主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第六題: 97.11.28公佈，97.12.12中午12點截止

如下圖，圓上的點A, B, C使得$\triangle ABC$爲一銳角三角形。而圓上的點X, Y, Z使得$\overline{AX}$和$\overline{BC}$垂直且相交於D點，$\overline{BY}$和$\overline{AC}$垂直且相交於E點，$\overline{CZ}$和$\overline{AB}$垂直且相交於F點。試求

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{BY}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{CZ}}{\overline{CF}}$$

並證明對圓上所有使得ABC爲一銳角三角形的可能點A, B, C，此值均相同。



解答：

解法(一) 令H爲$\triangle ABC$的垂心。首先，因爲$\angle BDH=\angle BEC$，且$\triangle BHD$和$\triangle BCE$有共同角$\angle HBD$，由AA性質可知$\triangle BHD\sim\triangle BCE$，因此$\angle BCE=\angle BHD$。此外，由圓周角可知$\angle BXA=\angle BCA$，所以$\angle BXD=\angle BHD$，又$\angle BDX=\angle BDH$，且$\triangle BHD$和$\triangle BXD$有共同邊$\overline{BD}$，由$AAS$性質可知$\triangle BDH\cong\triangle BDX$，因此$\overline{HD}=\overline{DX}$。同理，可得$\overline{HE}=\overline{EY}$和$\overline{HF}=\overline{FZ}$。所以

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AX}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{BY}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{CZ}}{\overline{CF}}&=\frac{\overline{AD}+\overline{DX}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{BE}+\overline{EY}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{CF}+\overline{FZ}}{\overline{CF}}\\&=1+\frac{\overline{DX}}{\overline{AD}}+1+\frac{\overline{EY}}{\overline{BE}}+1+\frac{\overline{FZ}}{\overline{CF}}\\&=3+\frac{\overline{DX}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{EY}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{FZ}}{\overline{CF}}\end{aligned}$$

上式分數部分皆爲兩個同底三角形中高的比值，因此可將其改寫成

$$3+\frac{\overline{DX}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{EY}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{FZ}}{\overline{CF}}=3+\frac{[HBC]}{[ABC]}+\frac{[HCA]}{[ABC]}+\frac{[HAB]}{[ABC]}=3+\frac{[ABC]}{[ABC]}=4$$

其中$[abc]$代表由a, b, c所構成三角形的面積。

解法(二) 由點冪定理(Power of a point theorem)可得$\overline{AD}\cdot\overline{DX}=\overline{BD}\cdot\overline{CD}$，因此

$$\frac{\overline{DX}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\cot B\cot C$$

同理可得

$$\frac{\overline{EY}}{\overline{BE}}=\cot C\cot A,\quad \frac{\overline{FZ}}{\overline{CF}}=\cot A\cot B$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AX}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{BY}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{CZ}}{\overline{CF}}&=\frac{\overline{AD}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{DX}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{BE}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{EY}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{CF}}{\overline{CF}}+\frac{\overline{FZ}}{\overline{CF}}\\&=3+\frac{\overline{DX}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{EY}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{FZ}}{\overline{CF}}\\&=3+\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B\\&=3+\frac{\tan A+\tan B+\tan C}{\tan A\tan B\tan C}\end{aligned}$$

宣稱對於所有銳角三角形$\triangle ABC$，下式皆成立

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C \tag{1}$$

因銳角三角形使得$\tan A,\tan B,\tan C$皆存在，所以(1)式兩邊皆有定義。另外

$$\tan C=\tan(\pi-A-B)=\tan(-A-B)=-\tan(A+B)$$

又

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

所以

$$\tan C=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

等同於(1)式。因此所求

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{BY}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{CZ}}{\overline{CF}}=3+1=4 \qquad \square$$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。