[雙週一題]網路數學問題徵答
九十七學年度第一學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第四題: 97.10.31公佈，97.11.14中午12點截止

試找出最大的整數n滿足

$$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{11}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{13}\right\rfloor<n$$

並證明所找的n是最大的。此處$\lfloor x\rfloor$表小於或等於x的最大整數。

解答： 宣稱$n=1715$滿足題目之不等式。首先檢查$n=1715$是否滿足給定的不等式

$$\left\lfloor\frac{1715}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1715}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1715}{11}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1715}{13}\right\rfloor=857+571+155+131=1714<1715$$

接著宣稱

$$\left\lfloor\frac{x}{k}\right\rfloor\geq\frac{x-k+1}{k},\quad\forall x,k\in\mathbb{N}\tag{1}$$

根據除法原理，存在q和r使得

$$x=qk+r,\quad 0\leq r\leq k-1$$

因爲$0\leq r/k<1$，則

$$\left\lfloor\frac{x}{k}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{qk+r}{k}\right\rfloor=\left\lfloor q+\frac{r}{k}\right\rfloor=q$$

且

$$\frac{x-k+1}{k}=\frac{qk+r-k+1}{k}=q+\frac{r-(k-1)}{k}\leq q=\left\lfloor\frac{x}{k}\right\rfloor$$

現在假設n爲一正整數滿足題目之不等式，因爲不等式兩邊皆爲整數，即

$$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{11}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{13}\right\rfloor\leq n-1\tag{2}$$

因此由(1)和(2)可得

$$\begin{aligned}n-1&\geq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{11}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{13}\right\rfloor\\&\geq\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{3}+\frac{n-10}{11}+\frac{n-12}{13}\\&=\frac{859}{858}n-\frac{2573}{858}\end{aligned}$$

則$\frac{n}{858} \leq \frac{1715}{858}$，所以$n \leq 1715$。 $\square$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。