[雙週一題]網路數學問題徵答
九十五學年度第二學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部

第七題: 96.06.1公佈，96.06.15中午12點截止

試證n次多項式方程式

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + x^2 + x + 1 = 0, \quad n \geq 3$$

的根不能全爲實數，其中$a_3, a_4, \ldots, a_n$皆爲實數。
例如$n = 3$時，令$a_3 = 1$，則方程式$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$的解爲$x = -1, x = i, x = -i$。

解答： 令$r_1, r_2, \ldots, r_n$爲$P(x) = 0$的根，且$r_1, r_2, \ldots, r_n$皆不爲0。現將$P(x) = 0$兩邊同除x^n且令$y = \frac{1}{x}$，則得到

$$Q(y) = y^n + y^{n-1} + y^{n-2} + a_3 y^{n-3} + \cdots + a_{n-2}y^2 + a_{n-1}y + a_n = 0$$

既然r是$p(x) = 0$的一個根，若且唯若$1/r$也必爲$Q(y)$的一個根。因此，我們令$Q(y) = 0$的根爲$s_1, s_2, \ldots, s_n$，其中$s_i = \frac{1}{r_i}, i = 1, \ldots, n$。則由根與係數的公式我們可得:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} s_i &= -1 \\ \sum_{i<j} s_i s_j &= 1 \end{aligned}$$

因此$\sum_{i=1}^{n} s_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)^2 - 2\sum_{i<j} s_i s_j = 1 - 2 = -1$。若$s_i$皆爲實數，則$\sum_{i=1}^{n} s_i^2 \geq 0$，所以我們可知$s_i, i = 1, 2, \ldots, n$不全爲實數，因此$r_1, r_2, \ldots, r_n$也不全爲實數。

答案請寄至 – 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳眞07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨爲「雙週一題」) 。解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。