

[雙週一題]網路數學問題徵答
九十五學年度第二學期

主辦單位： 中山大學應用數學系
補助單位： 教育部

第六題： 96.05.18公佈，96.06.01中午12點截止

令 p 為任意質數，試證 $\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^2}$ 。

註：

$$(1) \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$(3) n! = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times (n-1) \times n$$

(2) 若 m 除以 n 的餘數是 q ，則我們將其表示成 $m \equiv q \pmod{n}$

解答： 因 $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ ，故我們比較等號兩邊的 x^n 的係數可得下式

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

因此

$$\binom{2n}{n} = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}^2$$

因為我們知道對於任意質數 p 且 $0 < k < p$ ， $\binom{p}{k}$ 可以被 p 整除。

故對任意質數 p 可得 $\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^2}$ 。

答案請寄至—高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真07-5253809，或利用電子郵件信箱problem@math.nsysu.edu.tw (主旨為「雙週一題」)。
解答上請註明姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和E-mail。